SPRAWOZDANIE DYREKTORA

C. K.

GIMNAZYUM ŚW. JACKA

W KRAKOWIE

za rok szkolny 1895.



W KRAKOWIE.
NAKŁADEM FUNDUSZU NAUKOWEGO.

W DRUKARNI W. L. ANCZYCA I SPÓŁKI.
1895.



TREŚĆ:

ELEMENTARNA TEORYA LICZB UROJONYCH.

Drugiego stopnia pierwiastek liczby ujemnej:

$$I = \sqrt{-A} = \sqrt{A} . \sqrt{-1} = a \sqrt{-1} \ . \ . \ . 1)$$

nie daje się przedstawić żadną, do rozszerzonego szeregu naturalnego należącą liczbą wymierną, ani też nie wymierną, zawartą pomiędzy dwiema liczbami po sobie bezpośrednio następującymi; dlatego nazwano ów pierwiastek liczbą czysto urojoną.

We wzorze:

$$I = a \sqrt{-1} \ . \ . \ . 1)$$

oznaczającym liczbę czysto urojoną, współczynnik $a = \sqrt{A}$ ilości głównej $\sqrt{-1}$, jest bezwzględną liczbą rzeczywistą, wymierną albo niewymierną, wedle tego, czy liczba A bezwzględnie uważana jest zupełnym, czy też niezupełnym kwadratem.

Również rozwiązywanie równań drugiego stopnia, albo równań wyższorzędnych, dających się sprowadzić do równania o formie następującej:

$$x^2 + px + q = 0,$$

wydaje nieraz wzór:

$$x = a \pm b \sqrt{-1} \ . \ . \ . 2),$$

wyrażający liczbę złożoną z części rzeczywistej $\pm$ a, i z części czysto urojonej $\pm b \sqrt{-1}$.

Taką to liczbę nazwano liczbą wieloraką albo zespoloną.

Jakkolwiek liczby, o których tutaj jest mowa, nie znachodzą się w rozszerzonym szeregu naturalnym liczb dodatnich

i ujemnych, jednak dają się rysunkiem przedstawić, a nauce matematyki niepoślednie oddają usługi; zachodzi więc potrzeba wskazać początkującym zasadnicze ich własności i zestawić najważniejsze o nich twierdzenia.

Jednostka urojona i geometryczne jej znaczenie.

Wyrażenie $\sqrt{-1}$ nazwali matematycy jednostką urojoną i oznaczyli ją głoską „i".

Ta ilość czyni zadość równaniu następującemu:

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1,$$

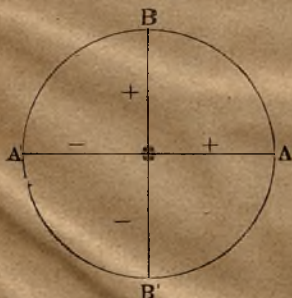
z którego wynika takie jednostki urojonej określenie:

„Nazywa się jednostką urojoną matematyczne wyrażenie, którego druga potęga jest ujemną jednostką rzeczywistą".

A ponieważ zawsze $(\pm i)^2 = -1$, przeto muszą być urojone jednostki dodatnie i ujemne. Obie możemy przedstawić rysunkiem na mocy twierdzenia planimetrycznego, które tak opiewa:

„Prostopadła, z któregokolwiek punktu linii kołowej do średnicy wykreślona, jest średnią geometrycznie proporcyonalną pomiędzy odcinkami, na które ona dzieli średnicę".

Jeśli tedy narysujemy linię kołową promieniem jednostkę długości wynoszącym, z dwiema średnicami do siebie prostopadłymi, z poziomą i pionową, które po za okrąg przedłużone, osiami liczbowemi nazywać będziemy; a obierając na osi poziomej kierunek od środka w prawą stronę się ciągnący za dodatni, a w lewą za ujemny; zaś na osi pionowej od środka do góry za dodatni, a na dół za ujemny, otrzymujemy:



$$(OB)^2 = -OA, \; OA = -1.1,$$

$$(-OB,)^2 = -OA, \; OA = -1.1,$$

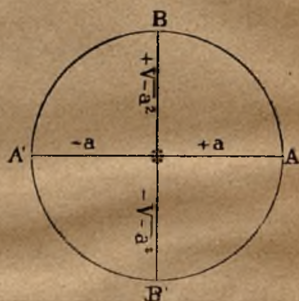
$$\text{więc } OB = +\sqrt{-1} = +i,$$

$$OB, = -\sqrt{-1} = -i.$$

Geometryczne znaczenie liczby urojonej.

Również każdą liczbę czysto urojoną, będącą zbiorem jednostek urojonych, możemy uważać za średnio geometrycznie proporcyonalną pomiędzy jej samoistnemi wartościami: dodatnią i ujemną, (albowiem $a\sqrt{-1} = \sqrt{-a^2} = \sqrt{-a.\,a}$) i geometrycznie oznaczyć odcinkiem osi pionowej, za promień koła obranym, mierzonym od zaczęcia „O" do góry albo na dół i „a" jednostek rzeczywistych wynoszącym.

Wykreśliwszy tedy koło promieniem OA = a, i dwie prostopadłe do siebie średnice pionową BB, i poziomą AA, mamy podobnie jak dla jednostki:



$$(OB)^2 = -OA,\ OA,$$
$$(-OB,)^2 = -OA,\ OA.$$

A więc

$$OB = a\sqrt{-1};\ OB, = -a\sqrt{-1}.$$

Naturalny szereg liczb czysto urojonych.

We wzorze: $a\sqrt{-1} = ai$, pisząc naprzód

$$a = o;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ .\ .\ .\ n,$$

a potem

$$a = o,\ -1;\ -2;\ -3;\ -4;\ -5;\ -6\ .\ .\ .\ n,$$

otrzymujemy dwa szeregi naturalne liczb czysto urojonych:

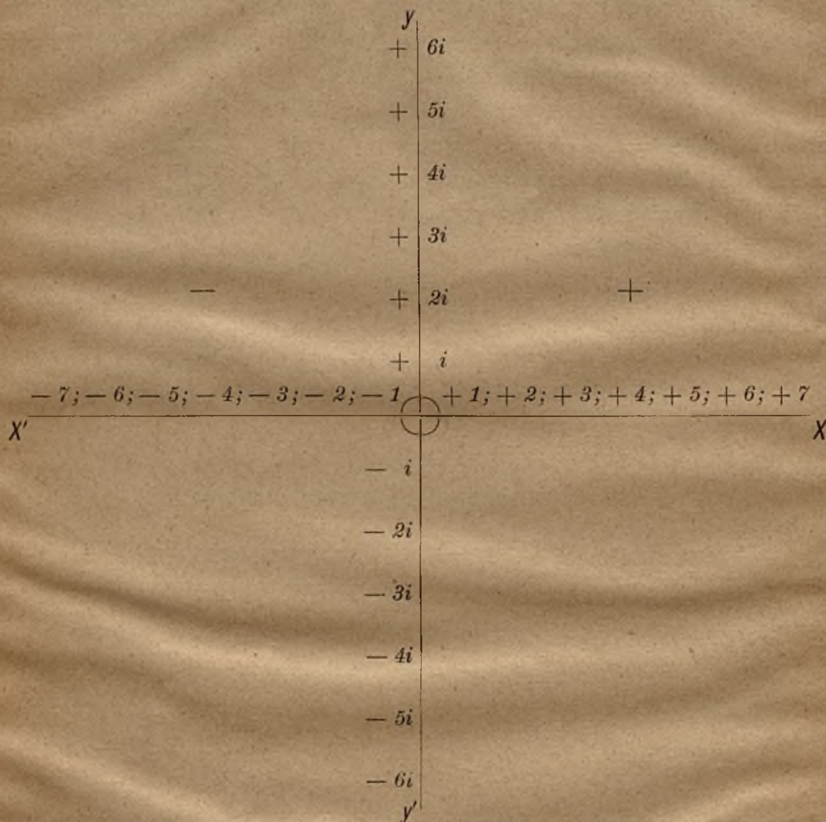
$$o;\quad i;\quad 2i;\quad 3i;\quad 4i;\quad 5i;\quad 6i;\ .\ .\ .\ +ni,$$
$$o;\ -i;\ -2i;\ -3i;\ -4i;\ -5i;\ -6i;\ .\ .\ .\ -ni,$$

które od wspólnego zaczęcia O rozciągają się w strony sobie przeciwne i na podobieństwo rozszerzonego szeregu liczb rzeczywistych, stanowią jeden szereg rozszerzony liczb czysto urojonych.

Dwa rozszerzone szeregi liczb rzeczywistych i czysto urojonych możemy razem w jednej figurze rysunkiem przedstawić. W tym celu wykreślamy dwie przecinające się proste linie, do siebie prostopadłe: poziomą i pionową, a na każdej z nich

odmierzamy, począwszy od zera 0, t. j. od punktu, w którym przecinają się owe proste do siebie prostopadłe: XX′ i YY′, po stronie dodatniej i odjemnej odcinki 1 2 3 4 5 . . . n, jednostek wynoszące.

Te dwie przecinające się proste i do siebie prostopadłe, nazywamy osiami liczbowemi, a mianowicie: oś poziomą XX′



osią liczb rzeczywistych, a pionową YY′ osią liczb czysto urojonych.

Płaszczyzna X′YXY′ w której osie rzeczone leżą, nazywa się płaszczyzną liczbową. Ona się dzieli osiami na cztery pola, czyli ćwierciany. Pole XOY jest ćwiercianem pierwszym; pole YOX′ ćwiercianem drugim; pole X′OY′ trzecim, a pole Y′OX jest ćwiercianem czwartym.

Liczby wielorakie.

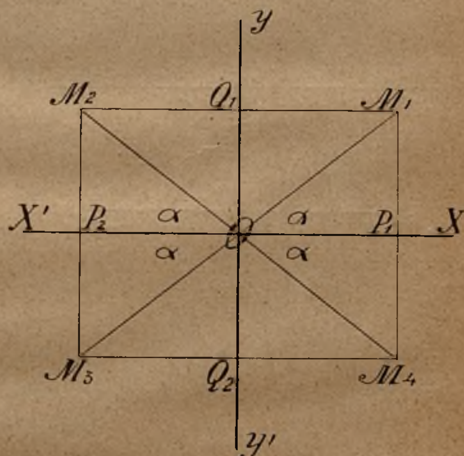
Wzór: $p = \pm a \pm b \sqrt{-1} = \pm a \pm bi \ . \ . \ . \ . \ 2)$, przedstawia liczbę składającą się z części rzeczywistej i z części urojonej. Taką iiczbę nazywamy liczbą wieloraką albo zespoloną.

Liczba wieloraka pojawia się w formach następujących:

$\alpha)\quad a + bi,\qquad \gamma)\ -a + bi,$

$\beta)\ -a + bi,\qquad \delta)\ -a - bi.$

Każdą liczbę wieloraką oznacza punkt M. znajdujący się na liczbowej płaszczyźnie, którego współrzędnymi analitycznymi w układzie osi prostokątnych są ilości „a“ i „b“ algebraicznie uważane:



i tak, liczbę $a + bi$, przedstawia punkt M_1; liczbę $-a + bi$, punkt M_2; liczbę $-a - bi$, oznacza punkt M_3; a liczbę $a - bi$, punkt M_4.

Liczba wieloraka w postaci goniometrycznej.

Liczbie wielorakiej o formie ogólnej $a + bi$, nadać możemy formę goniometryczną, bardzo dogodną w zastosowaniach. Jakoż ilość $a + bi$ nie zmienia się, jeżeli ją pomnożymy i zaraz podzielimy przez liczbę dodatnią

$$r = \sqrt{a^2 + b^2};$$

więc

$$a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i\,\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \ . \ . \ . \ a),$$

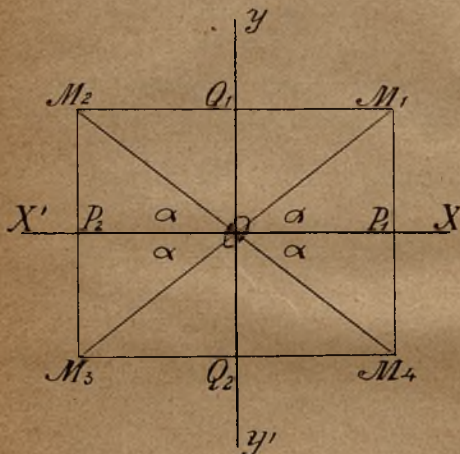
a ponieważ, według rysunku tutaj umieszczonego,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos.\ \alpha, \qquad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin.\ \alpha,$$

dlatego mamy zapowiedzianą formę:

$$a + bi = r. (\cos.\ \alpha + i \sin.\ \alpha) \ldots \ldots \ldots \text{b)}.$$

Ilość $r = \sqrt{a^2+b^2}$, zawsze dodatnia, mierząca oddalenie punktu M. od zaczęcia osi współrzędnych O. nazywa się modułem; zaś kąt α. między modułem i osią odcinków, mierzony od dodatniej połówki osi w kierunku przeciwnym temu, w jakim się posuwają wskazówki zegarowe, nazywa się argumentem.



Wielkość argumentu, dana przez wstawę i dostawę, zawarta jest między 0° i 360°, czyli między 0° i 2π.

A r g u m e n t α. można zwiększyć albo zmniejszyć o wielownik (wielokrotność) całego okręgu, nie naruszając przez to wielkości liczby wielorakiej; albowiem wstawa i dostawa tak zmienionego argumentu, zatrzymuje pierwotną wartość swoją.



Jakoż biorąc na uwagę kąt α. albo raczej łuk α. będący jego miarą, mający w A. swój początek a kończący się w punkcie M. w jakimbądź ćwiercianie, np. w pierwszym, i założywszy OM = 1, mamy:

$$PM = \sin.\ \alpha.$$
$$OP = \cos.\ \alpha.$$

Powiększywszy albo zmniejszywszy łuk AM o 2π, sprowadzimy jego koniec M. do tego samego punktu pierwotnego M. na obwodzie koła AMBA'B'A.

Również zwiększając albo zmniejszając łuk rzeczony o kilka okręgów, sprowadzamy skrajność jego ruchomą M. zawsze do tego samego miejsca; przeto

$$\sin. (\alpha \pm 2n. \pi) = \sin. \alpha,$$
$$\cos. (\alpha \pm 2n. \pi) = \cos. \alpha.$$

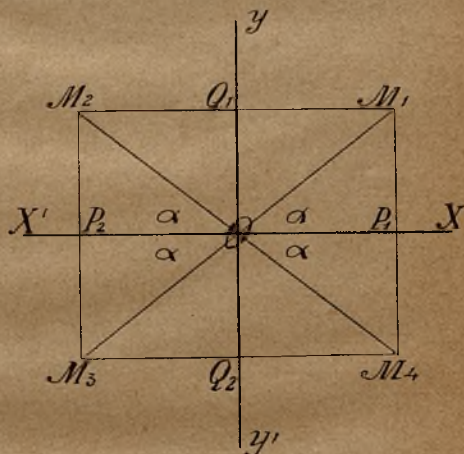
A zatem będzie zawsze równość:

$$a + bi = r (\cos. \alpha + i. \sin. \alpha) =$$
$$= r [\cos. (\alpha \pm 2n. \pi) + i. \sin. (\alpha \pm 2n. \pi)].$$

c. b. d. o.

Wielorakie ilości sprzężone; ilości sobie przeciwne.

Dwie ilości wielorakie, różniące się tylko znakami algebraicznymi w swoich częściach urojonych, a więc przedstawione punktami względem osi poziomej symetrycznymi, nazywają się wielorakiemi ilościami sprzężonemi.



Takiemi ilościami są:

$a + bi$ . . . M_1
$a - bi$ . . . M_2

$-a + bi$ . . . M_2
$-a - bi$ . . . M_3

albo w postaci goniometrycznej:

$a + bi = r (\cos. \alpha + i. \sin. \alpha)$ . . . . M_1
$a - bi = r [\cos. (2\pi - \alpha) + i. \sin. (2\pi - \alpha)]$ . . . . M_4.

$-a + bi = r [\cos. (\pi - \alpha) + i. \sin. (\pi - \alpha)]$ . . . . M_2.
$-a - bi = r [\cos. (\pi + \alpha) + i. \sin. (\pi + \alpha)]$ . . . . M_3.

Dwie ilości wielorakie, różniące się tylko znakami algebraicznymi w części rzeczywistej i w części urojonej, są sobie przeciwne.

Dwie wielorakie ilości sobie przeciwne przedstawiają punkty znajdujące się na polach kątów wierzchołkiem przeciw-

ległych, leżące na prostej linii przechodzącej przez zaczęcie O. współrzędnych.

Takiemi ilościami sobie przeciwnemi są:

$$a + bi = r\,(\cos.\ \alpha + i.\ \sin.\ \alpha) \ldots\ldots M_1.$$
$$a - bi = r\,[\cos.\ (\pi + \alpha) + i.\ \sin.\ (\pi + \alpha)] \ldots M_3.$$
$$-a + bi = r\,[\cos.\ (\pi - \alpha) + i.\ \sin.\ (\pi - \alpha)] \ldots M_2.$$
$$a - bi = r\,[\cos.\ (2\pi - \alpha) + i.\ \sin.\ (2\pi - \alpha)] \ldots M_4.$$

Roztrząsanie wzoru.

$$a + bi = r\,(\cos.\ \alpha + i.\ \sin.\ \alpha) \ldots b).$$

We wzorze tutaj napisanym kładąc kolejno $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$; $= \pi$; $\alpha = {}^3/_2\,\pi$; $a = 2\pi$, albo $\alpha = 2n\,\pi$, otrzymujemy wyniki następujące:

$$L_0 = r.\,(\cos.\ \frac{\alpha}{0} + i.\ \sin.\ \frac{\alpha}{0}) = r.\,(\cos.\ 0 + i.\ \sin.\ 0) = + r.$$
$$L\pi/_2 = r.\,(\cos.\ \frac{\pi}{2} + i.\ \sin.\ \frac{\pi}{2}) = + ri.$$
$$L\pi = r.\,(\cos.\ \pi + i\ \sin.\ \pi) = - r.$$
$$L^3/_2\pi = r.\,(\cos.\ {}^3/_2\pi + i.\ \sin.\ {}^3/_2\pi) = - ri.$$
$$L_2\pi = r.\,(\cos.\ 2\pi + i.\ \sin.\ 2\pi) = + r.$$

. . . .

. . . .

Biorąc w ogólności

$$\alpha = 2n\,\pi \quad i \quad \alpha = (2n + 1)\,\pi,$$

mamy dwa wzory godne uwagi:

$$L_2n\,\pi = r.\,(\cos.\ 2n\,\pi + i.\ \sin.\ 2n\,\pi) = + r. \ldots\ldots c).$$

$$L(_2n +_1)\,\pi = r.\,[\cos.\ (2n + 1)\,\pi + i.\ \sin.\ (2n + 1)\,\pi] = - r.\ .\ d).$$

Z dyskusyi wzoru b) okazuje się tedy, że ilości rzeczywiste i ilości urojone są szczególnymi przypadkami ilości wielorakich; zaś wzory c) i d) powiadają, że: „Każdą liczbę rzeczywistą można przedstawić we formie liczby wielorakiej, bez

zmiany jej wielkości, biorąc jej wartość samoistną za moduł, a za argument albo $\alpha = 2n\pi$, albo $\alpha = (2n + 1)\pi$, według tego, czy dana liczba jest dodatnia, czy też odjemna".

Równość liczb wielorakich.

Jeżeli dwie liczby wielorakie są równe, wtedy równość

$$a + bi = a_1 + b_1 i$$

daje: $(a - a_1) + (b - b_1) i = o.$ z czego wypływa, że:

$$a = a_1 \quad i \quad b = b_1.$$

Zatem: „Dwie liczby wielorakie są równe, jeżeli mają części rzeczywiste między sobą, a części urojone między sobą równe".

Z równości dwóch liczb wielorakich, wyrażonych funkcyami goniometrycznemi:

$$r (\cos. \alpha + i. \sin. \alpha) = r_1 (\cos. \alpha_1 + i. \sin. \alpha_1)$$

wynikają równości następujące:

$$r. \sin. \alpha = r_1 \sin. \alpha_1$$
$$r. \cos. \alpha = r_1 \cos. \alpha_1,$$

a z nich:

$$\text{tang. } \alpha = \text{tang. } \alpha_1,$$

co wskazuje, że albo $\alpha = \alpha_1$, albo $\alpha = 2\pi + \alpha_1$.

Z równości:

$$r. \cos. \alpha = r_1 \cos. \alpha_1,$$

albo z

$$r. \sin. \alpha = r_1 \sin. \alpha_1,$$

wynika: $r = r_1$.

Widzimy tedy, zebrawszy to wszystko, że:

„Dwie ilości wielorakie, wyrażone funkcyami goniometrycznemi, są wtedy równe, gdy równe mają moduły, a argumenty albo równe, albo różniące się o cały okrąg 2π".

Algebraiczne działania liczbami urojonemi.

Liczbami czysto urojonemi i liczbami wielorakiemi można, podobnie jak liczbami rzeczywistemi, wykonywać działania algebraiczne.

Zobaczmy więc, jakie będą wyniki tych działań.

Suma algebraiczna liczb czysto urojonych.

Dodając algebraicznie liczby czysto urojone do siebie, otrzymujemy sumę:

$$ai \pm bi \mp ci \pm di \mp \ldots \pm pi =$$
$$= (a \pm b \mp c \pm d \mp \ldots \pm p)\, i.$$

która jest także liczbą czysto urojoną.

Iloczyn dwóch czynników.

Mnożąc dwie ilości czysto urojone: $(\pm ai)$, $(\pm bi)$, albo $(\pm ai)$, $(\mp bi)$ przez siebie, otrzymujemy na iloczyn $- ab$, albo $+ ab$, t. j. liczbę zawsze rzeczywistą, odjemną, albo dodatnią, według tego, czy oba czynniki mają jednakowe, czy też różne znaki algebraiczne.

Iloczyn wielu czynników czysto urojonych.

Zanim przejdziemy do iloczynu wielu czynników czysto urojonych, zbadać należy najprzód, czem są różnego stopnia potęgi jednostki urojonej. W tym celu potęgując urojoną jednostkę $i = \sqrt{-1}$. przez liczby naturalny szereg stanowiące

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \ldots 4n,\ 4n + 1,\ 4n + 2,\ 4n + 3,$$

otrzymujemy wyniki następujące:

$$i^1 = i;\ i^2 = -1;\ i^3 = i^2 . i = -i;\ i^4 = i^2 . i^2 = +1.$$
$$i^5 = i^4 . i = +i;\ i^6 = i^5 . i = -1;\ i^7 = i^6 . i = -i;\ i^8 = i^4 . i^4 = +1.$$
$$^9 = i^8 . i = i;\ i^{10} = i^8 . i^2 = -1;\ i^{11} = i^{10} . i = -i;\ i^{12} = i^6 . i^6 = +1.$$

i t. d., i t. d.,

w ogólności:

$$\left.\begin{array}{ll} i^{4n} = +1; & i^{4n+1} = +i. \\ i^{4n+2} = -1; & i^{4n+3} = -i. \end{array}\right\} \quad \ldots \text{A}).$$

w których to wzorach liczba n. może przybierać wartości:

$$n = o;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ \ldots$$

Również potęgując przez liczby

$$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ \ldots\ 4n;\ 4n+1;\ 4n+2;\ 4n+3;$$

ujemną jednostkę urojoną, otrzymujemy wyniki następujące:

$$(-i)^1 = -i;\ (-i)^2 = -1;\ (-i)^3 = (-i)^2.(-i) = +i;$$
$$(-i)^4 = (-i)^2.(-i)^2 = +1;\ (-i)^5 = (-i)^4.(-i) = -i;$$
$$(-i)^6 = (-i)^4.(-i)^2 = -1;\ (-i)^7 = (-i)^6.(-i) = +i;$$
$$(-i)^8 = (-i)^4.(-i)^4 = +1;\ (-i)^9 = (-i)^8.(-i) = -i;$$

i t. d., i t. d.,

w ogólności:

$$\left.\begin{array}{ll}(-i)^{4n} = +1; & (-i)^{4n+1} = -i. \\ (-i)^{4n+2} = -1; & (-i)^{4n+3} = +i.\end{array}\right\} \ldots B).$$

Potęgując jednostkę urojoną przez liczby ujemne, stanowiące szereg naturalny, otrzymujemy następujące wyniki:

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = (-i)^1;\quad i^{-2} = i^{-1}.i^{-1} = (-i)^1.(-i)^1 = (-i)^2;$$
$$i^{-3} = (-i)^3;\ i^{-4} = (-i)^4;\ i^{-5} = (-i)^5 \text{ i t. d., i t. d.,}$$

więc w ogólności:

$$i^{-n} = (-i)^n \ldots\ldots C).$$

$$(-i)^{-1} = -\frac{1}{i} = -\frac{i}{i^2} = i^1;\quad (-i)^{-2} = (-i)^{-1}.(-i)^{-1} = i^2;$$
$$(-i)^{-3} = (-i)^{-2}.(-i)^{-1} = i^2.i = i^3 \text{ i t. d., i t. d.,}$$

więc w ogólności:

$$(-i)^{-n} = i^n \ldots\ldots D).$$

A) Iloczyn wielu czynników dodatnich.

Jeżeli wszystkie czynniki czysto urojone są dodatnie, wtedy mamy iloczyny:

$$ai.\ bi.\ ci = abc.\ i^3 = -abc.\ i.$$
$$ai.\ bi.\ ci.\ di = abcd.\ i^4 = +abcd.$$
$$ai.\ bi.\ ci.\ di.\ ei = abcde.\ i^5 = +abcde.\ i.$$
$$ai.\ bi.\ ci.\ di.\ ei.\ fi = abcdef.\ i^6 = -abcdef.$$
$$ai.\ bi.\ ci.\ di.\ ei.\ fi.\ gi = abcdefg.\ i^7 = -abcdefg.\ i.$$

$ai. bi. ci. di. ei. fi. gi. hi =$
$= abcdefgh. i^8 = + abcdefgh.$

$ai. bi. ci. di. ei. fi. gi. hi. ki =$
$= abcdefghk. i^9 = + abcdefghk. i.$

$ai. bi. ci. di. ei. fi. gi. hi. ki. li =$
$= abcdefghkl. i^{10} = - abcdefghkl.$

$ai. bi. ci. di. ei. fi. gi. hi. ki. li. mi =$
$= abcdefghklm. i^{11} = - abcdefghklm. i.$

$ai. bi. ci. di. ei. fi. gi. hi. ki. li. mi. ni =$
$= abcdefghklmn. i^{12} = + abcdefghklmn.$

i t. d., i t. d.

Z tych dziesięciu wyników mnożenia, możemy już wysnuć następujące twierdzenia:

I. „Jeżeli ilość dodatnich czynników urojonych jest parzystą, przedstawioną wyrażeniem 4n, wtedy ich iloczyn jest rzeczywistą liczbą dodatnią“.

II. „Jeżeli ilość tych czynników jest nieparzysta i przedstawiona wyrazem (4n + 1), wtedy ich iloczyn jest liczbą urojoną i dodatnią“.

III. „Jeżeli parzysta ilość czynników urojonych jest w liczbie (4n + 2), wtedy ich iloczyn jest liczbą rzeczywistą i odjemną“.

IV. „Jeśli ilość tychże czynników jest nieparzysta, oznaczona wyrazem (4n + 3), wtedy ich iloczyn jest liczbą urojoną i odjemną“.

B) Iloczyn urojonych czynników odjemnych.

Mnożąc urojone czynniki odjemne przez siebie, otrzymujemy iloczyny następujące:

$- ai. - bi. - ci = abc (- i)^3 = + abc. i.$

$- ai. - bi. - ci. - di = abcd (- i)^4 = + abcd.$

$- ai. - bi. - ci. - di. - ei = abcde (- i)^5 = - abcde. i.$

$- ai. - bi. - ci. - di. - ei. - fi =$
$= abcdef (- i)^6 = - abcdef.$

$- ai. - bi. - ci. - di. - ei. - fi. - gi =$
$= abcdefg (- i)^7 = + abcdefg. i.$

$-ai. -bi. -ci. -di. -ei. -fi. -gi. -hi =$
$= abcdefgh (-i)^8 = + abcdefgh.$

$-ai. -bi. -ci. -di. -ei. -fi. -gi. -hi. -ki =$
$= abcdefghk (-i)^9 = - abcdefghk. i.$

$-ai. -bi. -ci. -di. -ei. -fi. -gi. -hi. -ki. -li =$
$= abcdefghkl (-i)^{10} = - abcdefghkl.$

$-ai. -bi. -ci. -di. -ei. -fi. -gi. -hi. -ki. -li. -mi =$
$= abcdefghklm (-i)^{11} = + abcdefghklm. i.$

$-ai. -bi. -ci. -di. -ei. -fi. -gi. -hi. -ki. -li. -mi. -ni =$
$= abcdefghklmn (-i)^{12} = + abcdefghklmn.$

i t. d., i t. d.

Te wyniki wysnuwają następujące twierdzenia:

V. „Iloczyn odjemnych czynników czysto urojonych jest liczbą rzeczywistą i dodatnią, jeżeli ich ilość jest parzysta, przedstawiona wyrazem 4n“.

VI. „Iloczyn odjemnych czynników czysto urojonych jest liczbą urojoną i odjemną, jeżeli ich ilość jest nieparzysta i oznaczona wyrażeniem (4n + 1)“.

VII. „Iloczyn odjemnych czynników czysto urojonych jest liczbą rzeczywistą i odjemną, jeżeli ich ilość jest parzysta i wyrażona wskazem (4n + 2)“.

VIII. „Iloczyn czynników odjemnych, czysto urojonych jest liczbą urojoną i dodatnią, jeżeli ich ilość jest nieparzysta i przedstawiona wyrazem (4n + 3)“.

C) Iloczyn urojonych czynników w części dodatnich, a w części odjemnych.

Mnożąc przez siebie czynniki i dodatnie i odjemne, mamy wyniki następujące:

$ai. -bi. -ci = ai. bc (-i)^2 = - abc. i.$
$ai. bi. -ci = ab. i^2. (-i)^1 = + abc. i.$
$ai. -bi. -ci. -di = ai. bcd (-i)^3 = - abcd.$
$ai. bi. -ci. -di = ab. i^2. cd (-i)^2 = + abcd.$
$ai. bi. ci. -di = abc. i^3. d (-i)^1 = - abcd.$

$ai. - bi. - ci. - di. - ei. - fi. - gi. - hi =$
$= ai.\ bcdefgh\ (-i)^7 = -\ abcdefgh.$

$ai.\ bi. - ci. - di. - ei. - fi. - gi. - hi =$
$= ab.\ i^2.\ cdefgh\ (-i)^6 = +\ abcdefgh.$

$ai.\ bi.\ ci. - di. - ei. - fi. - gi. - hi =$
$= abc.\ i^3.\ defgh\ (-i)^5 = -\ abcdefgh.$

$ai.\ bi.\ ci.\ di. - ei. - fi. - gi. - hi =$
$= abcd.\ i^4.\ efgh\ (-i)^4 = +\ abcdefgh.$

$ai.\ bi.\ ci.\ di.\ ei. - fi. - gi. - hi =$
$= abcde.\ i^5.\ fgh\ (-i)^3 = -\ abcdefgh.$

$ai.\ bi.\ ci.\ di.\ ei.\ fi. - gi. - hi =$
$= abcdef.\ i^6.\ gh\ (-i)^2 = +\ abcdefgh.$

$ai.\ bi.\ ci.\ di.\ ei.\ fi.\ gi. - hi =$
$= abcdefg.\ i^7.\ h\ (-i)^1 = -\ abcdefgh.$

$ai. - bi. - ci. - di. - ei = ai.\ bcde\ (-i)^4 = +\ abcde.\ i.$
$ai.\ bi. - ci. - di. - ei = ab.\ i^2.\ cde\ (-i)^3 = -\ abcde.\ i.$
$ai.\ bi.\ ci. - di. - ei = abc.\ i^3.\ de\ (-i)^2 = +\ abcde.\ i.$
$ai.\ bi.\ ci.\ di. - ei = abcd.\ i^4.\ e\ (-i)^1 = -\ abcde.\ i.$

$ai. - bi. - ci. - di. - ei. - fi. - gi. - hi. - ki =$
$= ai.\ bcdefghk\ (-i)^8 = +\ abcdefghk.\ i$

$ai.\ bi. - ci. - di. - ei. - fi. - gi. - hi. - ki =$
$= ab.\ i^2.\ cdefghk\ (-i)^7 = -\ abcdefghk.\ i.$

$ai.\ bi.\ ci. - di. - ei. - fi. - gi. - hi. - ki =$
$= abc.\ i^3.\ defghk\ (-i)^6 = +\ abcdefghk.\ i.$

$ai.\ bi.\ ci.\ di. - ei. - fi. - gi. - hi. - ki =$
$= abcd.\ i^4.\ efghk\ (-i)^5 = -\ abcdefghk.\ i.$

$ai.\ bi.\ ci.\ di.\ ei. - fi. - gi. - hi. - ki =$
$= abcde.\ i^5.\ fghk\ (-i)^4 = +\ abcdefghk.\ i.$

$ai.\ bi.\ ci.\ di.\ ei.\ fi. - gi. - hi. - ki =$
$= abcdef.\ i^6.\ ghk\ (-i)^3 = -\ abcdefghk.\ i.$

$ai.\ bi.\ ci.\ di.\ ei.\ fi.\ gi. - hi. - ki =$
$= abcdefg.\ i^7.\ hk\ (-i)^2 = +\ abcdefghk.\ i.$

$ai.\ bi.\ ci.\ di.\ ei.\ fi.\ gi.\ hi. - ki =$
$= abcdefgh.\ i^8.\ k\ (-i)^1 = -\ abcdefghk.\ i.$

$$ai. - bi. - ci. - di. - ei. - fi =$$
$$= a.\ i.\ bcdef\ (-\ i)^5 = +\ abcdef.$$
$$ai.\ bi. - ci. - di. - ei. - fi =$$
$$= ab.\ i^2.\ cdef\ (-\ i)^4 = -\ abcdef.$$
$$ai.\ bi.\ ci. - di. - ei. - fi =$$
$$= abc.\ i^3.\ def\ (-\ i)^3 = +\ abcdef.$$
$$ai.\ bi.\ ci.\ di. - ei. - fi =$$
$$= abcd.\ i^4.\ ef\ (-\ i)^2 = -\ abcdef.$$
$$ai.\ bi.\ ci.\ di.\ ei. - fi =$$
$$= abcde.\ i^5.\ f\ (-\ i)^1 = +\ abcdef.$$

$$ai. - bi. - ci. - di. - ei. - fi. - gi. - hi. - ki. - li =$$
$$= ai.\ bcdefghkl\ (-\ i)^9 = +\ abcdefghkl.$$
$$ai.\ bi. - ci. - di. - ei. - fi. - gi. - hi. - ki. - li =$$
$$= ab.\ i^2.\ cdefghkl\ (-\ i)^8 = -\ abcdefghkl.$$
$$ai.\ bi.\ ci. - di. - ei. - fi. - gi. - hi. - ki. - li =$$
$$= abc.\ i^3.\ defghkl\ (-\ i)^7 = +\ abcdefghkl.$$
$$ai.\ bi.\ ci.\ di. - ei. - fi. - gi. - hi. - ki. - li =$$
$$= abcd.\ i^4.\ efghkl\ (-\ i)^6 = -\ abcdefghkl.$$
$$ai.\ bi.\ ci.\ di.\ ei. - fi. - gi. - hi. - ki. - li =$$
$$= abcde.\ i^5.\ fghkl\ (-\ i)^5 = +\ abcdefghkl.$$
$$ai.\ bi.\ ci.\ di.\ ei.\ fi. - gi. - hi. - ki. - li =$$
$$= abcdef.\ i^6.\ ghkl\ (-\ i)^4 = -\ abcdefghkl.$$
$$ai.\ bi.\ ci.\ di.\ ei.\ fi.\ gi. - hi. - ki. - li =$$
$$= abcdefg.\ i^7.\ hkl\ (-\ i)^3 = +\ abcdefghkl.$$
$$ai.\ bi.\ ci.\ di.\ ei.\ fi.\ gi.\ hi. - ki. - li =$$
$$= abcdefgh.\ i^8.\ kl\ (-\ i)^2 = -\ abcdefghkl.$$
$$ai.\ bi.\ ci.\ di.\ ei.\ fi.\ gi.\ hi.\ ki. - li =$$
$$= abcdefghk.\ i^9.\ l\ (-\ i)^1 = +\ abcdefghkl.$$

$$ai. - bi. - ci. - di. - ei. - fi. - gi =$$
$$= ai.\ bcdefg\ (-\ i)^6 = -\ abcdefg.\ i.$$
$$ai.\ bi. - ci. - di. - ei. - fi. - gi =$$
$$= ab.\ i^2.\ cdefg\ (-\ i)^5 = +\ abcdefg.\ i.$$
$$ai.\ bi.\ ci. - di. - ei. - fi. - gi =$$
$$= abc.\ i^3.\ defg\ (-\ i)^4 = -\ abcdefg.\ i.$$

$ai . bi . ci . di . — ei . — fi . — gi =$
$= abcd . i^4 . efg (— i)^3 = + abcdefg . i.$
$ai . bi . ci . di . ei . — fi . — gi =$
$= abcde . i^5 . fg (— i)^2 = — abcdefg . i.$
$ai . bi . ci . di . ei . fi . — gi =$
$= abcdef . i^6 . g (— i)^1 = + abcdefg . i.$

$ai . — bi . — ci . — di . — ei . — fi . — gi . — hi . — ki . — li . — mi =$
$= ai . bcdefghklm (— i)^{10} = — abcdefghklm . i.$
$ai . bi . — ci . — di . — ei . — fi . — gi . — hi . — ki . — li . — mi =$
$= ab . i^2 . cdefghklm (— i)^9 = + abcdefghklm . i.$
$ai . bi . ci . — di . — ei . — fi . — gi . — hi . — ki . — li . — mi =$
$= abc . i^3 . defghklm (— i)^8 = — abcdefghklm . i.$
$ai . bi . ci . di . — ei . — fi . — gi . — hi . — ki . — li . — mi =$
$= abcd . i^4 . efghklm (— i)^7 = + abcdefghklm . i.$
$ai . bi . ci . di . ei . — fi . — gi . — hi . — ki . — li . — mi =$
$= abcde . i^5 . fghklm (— i)^6 = — abcdefghklm . i.$
$ai . bi . ci . di . ei . fi . — gi . — hi . — ki . — li . — mi =$
$= abcdef . i^6 . ghklm (— i)^5 = + abcdefghklm . i.$
$ai . bi . ci . di . ei . fi . gi . — hi . — ki . — li . — mi =$
$= abcdefg . i^7 . hklm (— i)^4 = — abcdefghklm . i.$
$ai . bi . ci . di . ei . fi . gi . hi . — ki . — li . — mi =$
$= abcdefgh . i^8 . klm (— i)^3 = + abcdefghklm . i.$
$ai . bi . ci . di . ei . fi . gi . hi . ki . — li . — mi =$
$= abcdefghk . i^9 . lm (— i)^2 = — abcdefghklm . i.$
$ai . bi . ci . di . ei . fi . gi . hi . ki . li . — mi =$
$= abcdefghkl . i^{10} . m (— i)^1 = + abcdefghklm . i.$

i t. d., i t. d.

Przypatrzywszy się dobrze tym wynikom, odkrywamy ciekawe własności liczb czysto urojonych, odnoszące się do ich iloczynów. Zobaczmy tedy jakie są owe iloczyny w przypadku obecnie rozbieranym.

a). Jeżeli ilość czynników urojonych w części dodatnich, a w części odjemnych jest nieparzysta i przedstawiona wyrazem $(4n + 1)$, a z nich mamy:

1	dodatni,	a (4n + 0)	odjemnych,	wtedy	iloczyn	+ Ai.
2	„	a (4n — 1)	„	„	„	— Ai.
3	„	a (4n – 2)	„	„	„	+ Ai.
4	„	a (4n — 3)	„	„	„	— Ai.
5	„	a (4n — 4)	„	„	„	+ Ai.
6	„	a (4n — 5)	„	„	„	— Ai.
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
(4n — 3)	dodatn.,	a 4.	odjemnych,	wtedy	iioczyn	+ Ai.
(4n — 2)	„	a 3.	„	„	„	— Ai.
(4n — 1)	„	a 2.	„	„	„	+ Ai.
4n	„	a 1.	„	„	„	— Ai.

Z tego zestawienia możemy już wysnuć dwa następujące twierdzenia:

α). „Jeśli ilość dodatnich i odjemnych czynników urojonych razem wynosi (4n + 1), a ilości dodatnich czynników tworzą arytmetyczny szereg rosnący:

1, 3, 5, 7 . . . . (4n + 3), (4n — 1),

zaś odjemnych malejący:

4n, (4n — 2), (4n — 4), (4n — 6) 4, 2,

wtedy iloczyn czynników urojonych jest liczbą urojoną i dodatnią".

β). „Jeżeli z (4n + 1) ilości czynników dodatnich i odjemnych, ilości dodatnich stanowią arytmetyczny szereg rosnący:

2, 4, 6 . . . . (4n — 4), (4n — 2), 4n,

a ilości odjemnych malejący:

(4n — 1), (4n — 3), (4n — 5) 5, 3, 1,

wtedy iloczyn tych czynników urojonych jest także liczbą urojoną i odjemną".

b). Gdy wszystkie czynniki dodatnie i odjemne znajdują się w liczbie (4n + 3), a z nich:

1	dodat.,	a (4n + 2)	odjemn.,	to	iloczyn	— Ai.
2	„	a (4n + 1)	„	to	„	+ Ai.
3	„	a 4n	„	to	„	— Ai.
4	„	a (4n — 1)	„	to	„	+ Ai.
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

$(4n - 1)$ dodat.,	a 4	odjemn.,	to	iloczyn	$- Ai$.
$4n$ „	a 3	„	to	„	$+ Ai$.
$(4n + 1)$ „	a 2	„	to	„	$- Ai$.
$(4n + 2)$ „	a 1	„	to	„	$+ Ai$.

Możemy więc twierdzić, że:

α). „Jeżeli ilość urojonych czynników dodatnich i odjemnych razem wynosi $(4n + 3)$, a ilości dodatnich stanowią szereg arytmetyczny rosnący:

$$1, 3, 5, 7 \ldots . (4n - 3), (4n - 1), (4n + 1),$$

zaś odjemnych malejący:

$$(4n + 2), 4n, (4n - 2), (4n - 4) \ldots . 6, 4, 2,$$

wtedy iloczyn czynników urojonych jest liczbą urojoną i odjemną“.

β). „Jeżeli ilość czynników urojonych, dodatnich i odjemnych, jest $(4n + 3)$, a ilości czynników dodatnich czynią szereg rosnący:

$$2, 4, 6, 8 \ldots . (4n - 2), 4n, (4n + 2),$$

a odjemnych malejący:

$$(4n + 1), (4n - 1), (4n - 3), (4n - 5) \ldots 5, 3, 1,$$

wtedy iloczyn wszystkich czynników urojonych jest urojoną liczbą i dodatnią“.

c). Gdy ilość czynników jest $4n$, a z tych:

1 dodat.,	a $(4n - 1)$	odjemn.,	to	iloczyn	$- A$.
2 „	a $(4n - 2)$	„	to	„	$+ A$.
3 „	a $(4n - 3)$	„	to	„	$- A$.
4 „	a $(4n - 4)$	„	to	„	$+ A$.
. . . .					
. . . .					
$(4n - 3)$ dodat.,	a 3	odjemn.,	to	iloczyn	$- A$.
$(4n - 2)$ „	a 2	„	to	„	$+ A$.
$(4n - 1)$ „	a 1	„	to	„	$- A$.

Zatem możemy twierdzić, że:

α). „Iloczyn wszystkich $4n$. czynników urojonych, w części dodatnich, a w części odjemnych, jest liczbą rzeczywistą i dodatnią, jeżeli ilości czynników dodatnich tworzą szereg rosnący:

$$2, 4, 6 \ldots . (4n - 2), 4n,$$

a odjemnych malejący:

(4n — 2), (4n — 4), (4n — 6) . . . . 4, 2".

β). „Iloczyn 4n. czynników urojonych, w części dodatnich, a w części odjemnych, jest rzeczywistą liczbą odjemną, jeżeli ilości dodatnich czynników stanowią szereg rosnący:

1, 3, 5, 7 . . . (4n — 5), (4n — 3), (4n — 1),

a odjemnych malejący:

(4n — 1), (4n — 3), (4n — 5), (4n — 7) . . . 5, 3, 1".

d). Jeżeli ilość wszystkich czynników jest (4n + 2), a z tych:

1	dodat.,	a (4n + 1)	odjemn.,	to	iloczyn	+ A.
2	„	a n	„	to	„	— A.
3	„	a (n — 1)	„	to	„	+ A.
4	„	a (n — 2)	„	to	„	— A.
5	„	a (n — 3)	„	to	„	+ A.
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
(4n — 3)	dodat.,	a 5	odjemn.,	to	iloczyn	+ A.
(4n — 2)	„	a 4	„	to	„	— A.
(4n — 1)	„	a 3	„	to	„	+ A.
4n	„	a 2	„	to	„	— A.
(4n + 1)	„	a 1	„	to	„	+ A.

Z czego wysnuwamy twierdzenie:

α). „Iloczyn (4n + 2) urojonych czynników w części dodatnich, a w części odjemnych, jest rzeczywistą liczbą dodatnią, gdy ilości czynników dodatnich tworzą szereg rosnący:

1, 3, 5, 7 . . . . (4n — 3), (4n — 1), (4n + 1),

a odjemnych malejący:

(4n + 1), (4n — 1), (4n — 3), (4n — 5) . . . 5, 3, 1".

β). „Iloczyn (4n + 2) czynników urojonych, w części dodatnich, a w części odjemnych, jest rzeczywistą liczbą odjemną, gdy dodatnich czynników ilości stanowią szereg rosnący:

2, 4, 6 . . . . (4n — 4), (4n — 2), 4n,

a odjemnych malejący:

4n, (4n — 2), (4n — 4) . . . . 6, 4, 2".

Iloraz dwóch liczb urojonych.

Dzieląc dwie czysto urojone liczby przez siebie:

$$\pm ai : \pm bi = + a/b,$$
$$\mp ai : \mp bi = - a/b,$$

otrzymujemy na iloraz zawsze liczbę rzeczywistą, dodatnią, gdy dzielna i dzielnik mają jednakowe znaki algebraiczne, a odjemną, gdy różne są znaki dzielnej i dzielnika.

Potęga liczby czysto urojonej.

Potęgując liczbę czysto urojoną przez liczbę rzeczywistą i całkowitą m, otrzymujemy wzór:

$$(\pm ai)^m = a^m. (\pm i)^m \quad . \; . \; . \quad A).$$

który rozpada się na dwa następujące:

$$(+ ai)^m = a^m. (+ i)^m \quad . \; . \; . \quad \alpha).$$
$$(- ai)^m = a^m. (- i)^m \quad . \; . \; . \quad \beta).$$

Wykładnik potęgowy może być albo dodatni, albo odjemny, parzystą liczbą, albo nieparzystą.

Od jakości algebraicznej i rodzaju wykładnika potęgowego i od jakości algebraicznej jednostki urojonej zawisł rodzaj i jakość algebraiczna potęgi.

Zobaczmy więc, jaka będzie.

Potęga liczby urojonej o wykładniku dodatnim.

Zakładając $m > o$ i $m = 4n$, mamy ze wzoru α) i β):

$$(+ ai)^{4n} = a^{4n}. (+ i)^{4n} = a^{4n},$$
$$(- ai)^{4n} = a^{4n}. (- i)^{4n} = a^{4n}.$$

Jeżeli dalej $m = 4n + 1$, wzory α) i β), wydają:

$$(+ ai)^{4n+1} = a^{4n+1}. (+ i)^{4n+1} = + a^{4n+1}. i.$$
$$(- ai)^{4n+1} = a^{4n+1}. (- i)^{4n+1} = - a^{4n+1}. i.$$

Gdy $m = 4n + 2$, to ze wzorów α) i β) wynikają:

$$(+ ai)^{4n+2} = a^{4n+2}. (+ i)^{4n+2} = - a^{4n+2},$$
$$(- ai)^{4n+2} = a^{4n+2}. (- i)^{4n+2} = - a^{4n+2}.$$

Skoro ostatecznie $m = 4n + 3$, otrzymujemy z α) i β):

$$(+ ai)^{4n+3} = a^{4n+3}. (+ i)^{4n+3} = - a^{4n+3}. i.$$
$$(- ai)^{4n+3} = a^{4n+3}. (- i)^{4n+3} = + a^{4n+3}. i.$$

Rzucając okiem na wyniki potęgowania, sformułować możemy twierdzenia następujące:

„Potęga liczby czysto urojonej parzystego stopnia, o dodatnim wykładniku 4n, jest rzeczywistą liczbą dodatnią, bez względu na jakość jednostki urojonej“.

„Potęga parzystego stopnia o wykładniku dodatnim (4n + 2), jest rzeczywistą liczbą odjemną, bez względu na jakość algebraiczną jednostki urojonej“.

„Potęga nieparzystego stopnia o wykładniku dodatnim (4n + 1), jest urojoną liczbą dodatnią, gdy dodatnią jest jednostka urojona, a odjemną, gdy odjemną jest urojona jednostka“.

„Potęga nieparzystego stopnia o wykładniku dodatnim (4n + 3), jest urojoną liczbą odjemną, gdy dodatnią jest jednostka urojona, a dodatnią, gdy owa jednostka jest odjemną“.

Teraz rozważmy, jaka będzie:

Potęga liczby urojonej o wykładniku odjemnym.

We wzorze: A) . . . $(\pm ai)^m = a^m. (\pm i)^m$, podstawiając $- m$, otrzymujemy:

$$\alpha) \dots (+ ai)^{-m} = a^{-m}. (+ i)^{-m} = a^{-m}. (- i)^m,$$
$$\beta) \dots (- ai)^{-m} = a^{-m}. (- i)^{-m} = a^{-m}. (+ i)^m.$$

Stawiając $m = 4n$, uzyskamy:

$$(+ ai)^{-4n} = a^{-4n}. (- i)^{4n} = + a^{-4n}.$$
$$(- ai)^{-4n} = a^{-4n}. (+ i)^{4n} = + a^{-4n}.$$

Jeżeli weźmiemy $m = 4n + 1$, wtedy wzory α) i β), dają wyniki:

$$(+ ai)^{-(4n+1)} = a^{-(4n+1)}. (- i)^{(4n+1)} = - a^{-(4n+1)}. i.$$
$$(- ai)^{-(4n+1)} = a^{-(4n+1)}. (+ i)^{(4n+1)} = + a^{-(4n+1)}. i.$$

Gdy $m = (4n + 2)$, wtedy otrzymujemy ze wzorów α) i β):

$$(+ ai)^{-(4n+2)} = a^{-(4n+2)}. (- i)^{4n+2} = - a^{-(4n+2)}.$$
$$(- ai)^{-(4n+2)} = a^{-(4n+2)}. (+ i)^{4n+2} = - a^{-(4n+2)}.$$

Zakładając ostatecznie $m = (4n + 3)$, mamy z α) i β):

$$(+ai)^{-(4n+3)} = a^{-(4n+3)} . (-i)^{(4n+3)} = + a^{-(4n+3)} . i.$$

$$(-ai)^{-(4n+3)} = a^{-(4n+3)} . (+i)^{(4n+3)} = - a^{-(4n+3)} . i.$$

Wszystkie te wyniki dowodzą następujących twierdzeń:

„Potęga liczby urojonej parzystego stopnia o wykładniku odjemnym $4n$, jest liczbą rzeczywistą i dodatnią, bez względu na jakość urojonej jednostki".

„Potęga liczby urojonej parzystego stopnia o wykładniku odjemnym $(4n + 2)$, jest rzeczywistą liczbą odjemną, bez względu na jakość urojonej jednostki".

„Potęga liczby urojonej nieparzystego stopnia o wykładniku odjemnym $(4n + 1)$, jest urojoną liczbą odjemną, gdy dodatnią jest urojona jednostka, a dodatnią, gdy odjemną jest urojona jednostka".

„Potęga liczby urojonej nieparzystego stopnia o wykładniku odjemnym $(4n + 3)$, jest urojoną liczbą dodatnią, gdy jednostka urojona jest dodatnia, a odjemną, gdy także odjemną jest jednostka urojona".

Pierwiastek kwadratowy liczby czysto urojonej.

We wzorze znanym:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

pisząc $a = o$, a za b. podstawiając $- b$, otrzymujemy:

$$\sqrt{\pm \sqrt{-b}} = \sqrt{\frac{\sqrt{+b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{-\sqrt{+b}}{2}} = \frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt{2}} (1 \pm \sqrt{-1}) =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{b}{4}} (1 \pm \sqrt{-1}) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; a).$$

albo rozdzielając na dwa wzory:

$$\pm \sqrt{+\sqrt{-b}} = \sqrt[4]{\frac{b}{4}} \cdot (1 + \sqrt{-1}) = \pm \sqrt[4]{\frac{b}{4}} \cdot (i + i) \; . \; . \; . \; \alpha).$$

$$\mp \sqrt{-\sqrt{-b}} = \sqrt[4]{\frac{b}{4}} \cdot (1 - \sqrt{-1}) = \mp \sqrt[4]{\frac{b}{4}} \cdot (i - i) \; . \; . \; . \; \beta).$$

Z czego wynika twierdzenie:

„Pierwiastek kwadratowy liczby czysto urojonej jest liczbą wieloraką, a mianowicie jest ona sumą algebraiczną jednostki rzeczywistej i jednostki urojonej, pomnożoną przez dwukwadratowy pierwiastek czwartej części liczby będącej wartością samoistną danej liczby czysto urojonej“.

Działania algebraiczne liczbami wielorakiemi.

Suma algebraiczna.

Dodając do siebie algebraicznie liczby wielorakie, otrzymujemy wzór następujący:

$$(a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) \pm (a_3 + b_3 i) \pm (a_4 + b_4 i) \pm \ldots \pm (a_4 + b_4 i) = A + B i \ldots a).$$

w którym:

$$A = a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm a_4 \pm \ldots \pm a_4,$$
$$B = b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm b_4 \pm \ldots \pm b_4.$$

Z tego wzoru a), wysnuwamy twierdzenie:

„Suma algebraiczna dowolnej ilości liczb zespolonych (wielorakich) jest nową liczbą w ogólności wieloraką. Sumę tę utworzymy dodając algebraicznie osobno części rzeczywiste, a osobno części urojone i łącząc te dwie sumy przynależnym znakiem dodawania albo odejmowania“.

W szczególnych razach może rzeczona suma być liczbą rzeczywistą albo czysto urojoną, wedle tego, czy $B = o$, czy $A = o$.

Iloczyn dwóch liczb wielorakich.

Oznaczając dwa czynniki wielorakie, pierwszy wyrażeniem: $a_1 + b_1 i$, a drugi wyrażeniem: $a_2 + b_2 i$, w których części rzeczywiste i części urojone mogą mieć albo jednakowe, albo różne znaki algebraiczne, w rozmaitych zestawieniach, otrzymujemy iloczyny następujące:

$$(a_1 + b_2 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i =$$
$$= A_1 + B_1 i.$$

$$(a_1 + b_1 i)(-a_2 + b_2 i) = -(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 a_1) i = \\ = -A + B i.$$

$$(a_1 + b_1 i)(-a_2 - b_2 i) = -(a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i = \\ = -A_1 - B_1 i.$$

$$(a_1 + b_1 i)\ (a_2 - b_2 i) = (a_1 a_2 + b_1 b_2) - (a_1 b_2 - a_2 b_1) i = \\ = A - B i.$$

$$(-a_1 + b_1 i)\ (a_2 + b_2 i) = -(a_1 a_2 + b_1 b_2) - (a_1 b_2 - a_2 b_1) i = \\ = -A - B i.$$

$$(-a_1 + b_1 i)(-a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i = \\ = A_1 - B_1 i.$$

$$(-a_1 + b_1 i)(-a_2 - b_2 i) = (a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) i = \\ = A + B i.$$

$$(-a_1 + b_1 i)\ (a_2 - b_2 i) = -(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i = \\ = -A_1 + B_1 i.$$

$$(-a_1 - b_1 i)\ (a_2 + b_2 i) = -(a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i = \\ = -A_1 - B_1 i.$$

$$(-a_1 - b_1 i)(-a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 + b_1 b_2) - (a_1 b_2 - a_2 b_1) i = \\ = A - B i.$$

$$(-a_1 - b_1 i)(-a_2 - b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i = \\ = A_1 + B_1 i.$$

$$(-a_1 - b_1 i)\ (a_2 - b_2 i) = -(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) i = \\ = -A + B i.$$

$$(a_1 - b_1 i)\ (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) i = \\ = A + B i.$$

$$(a_1 - b_1 i)(-a_2 + b_2 i) = -(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i = \\ = -A_1 + B_1 i.$$

$$(a_1 - b_1 i)(-a_2 - b_2 i) = -(a_1 a_2 + b_1 b_2) - (a_1 b_2 - a_2 b_1) i = \\ = -A - B i.$$

$$(a_1 - b_1 i)\ (a_2 - b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i = \\ = A_1 - B_1 i.$$

Z których wysnuwamy twierdzenie ogólne:

„Iloczyn dwóch czynników wielorakich jest w ogólności nową liczbą wieloraką; jeżeli albo:

$$B = (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0,$$

$$\text{albo } A_1 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) = 0,$$

wtedy iloczyn dwóch czynników wielorakich jest albo liczbą rzeczywistą, albo liczbą czysto urojoną".

Zestawiwszy owe iloczyny, możemy, pamiętając, że $A = a_1 a_2 + b_1 b_2$; $B = a_1 b_2 - a_2 b_1$; $A_1 = a_1 a_2 - b_1 b_2$; $B_1 = a_1 b_2 + a_2 b_1$; wyczytać z nich szczególne twierdzenia następujące:

a) „Iloczyn dwóch czynników wielorakich, przedstawionych punktami znajdującymi się w ćwiercianie pierwszym, albo w trzecim pola liczbowego, jest nową liczbą wieloraką w postaci $A_1 + B_1$ i. $\binom{1 \cdot 1}{3 \cdot 3}$".

b) „Iloczyn dwóch czynników wielorakich, które są przedstawione punktami znajdującymi się razem w ćwiercianie drugim lub czwartym pola liczbowego, jest liczbą wieloraką w formie $A_1 - B_1$ i. $\binom{2 \cdot 2}{4 \cdot 4}$".

c) „Iloczyn dwóch czynników wielorakich, wyrażonych punktami, z których pierwszy znajduje się w ćwiercianie drugim, a drugi w czwartym, albo pierwszy jest w ćwiercianie czwartym, a drugi w drugim pola liczbowego, jest także liczbą wieloraką, mającą postać $- A_1 + B_1$ i. $\binom{2 \cdot 4}{4 \cdot 2}$".

d) „Iloczyn dwóch czynników wielorakich, przedstawionych punktami, z których pierwszy znajduje się w ćwiercianie pierwszym, a drugi w trzecim, albo pierwszy w trzecim, a drugi w pierwszym pola liczbowego, jest liczbą wieloraką w postaci $- A_1 - B_1$ i. $\binom{1 \cdot 3}{3 \cdot 1}$".

α) „Iloczyn dwóch czynników wielorakich, przedstawionych punktami, z których pierwszy znajduje się w ćwiercianie drugim, a drugi w trzecim, albo pierwszy w czwartym, a drugi w pierwszym pola liczbowego, jest ilością wieloraką w postaci $A + B$ i. $\binom{2 \cdot 3}{4 \cdot 1}$".

β) „Iloczyn dwóch liczb wielorakich, przedstawionych punktami, z których pierwszy znajduje się w pierwszym, a drugi w czwartym, albo pierwszy w trzecim, a drugi w drugim ćwiercianie pola liczbowego, jest liczbą wieloraką, mającą postać $A - B$ i. $\binom{1 \cdot 4}{3 \cdot 2}$".

γ) „Iloczyn dwóch czynników wielorakich, przedstawionych punktami, z których pierwszy znajduje się w pierwszym, a drugi w drugim, albo pierwszy w trzecim, a drugi w czwartym

ćwiercianie pola liczbowego, jest liczbą wieloraką w postaci — A + B i. $\binom{1\cdot 2}{3\cdot 4}$".

δ) „Iloczyn dwóch liczb wielorakich, przedstawionych punktami, z których pierwszy znajduje się w drugim, a drugi w pierwszym, albo pierwszy w czwartym, a drugi w trzecim ćwiercianie pola liczbowego, jest liczbą wieloraką, mającą postać — A — B i. $\binom{2\cdot 1}{4\cdot 3}$".

Iloraz dwóch liczb wielorakich.

Dzieląc liczbę wieloraką: $a_1 + b_1 i$, przedstawioną punktem znajdującym się w którymkolwiek ćwiercianie pola liczbowego, przez inną liczbę, takim samym sposobem przedstawioną, $a_2 + b_2 i$, otrzymujemy wyniki następujące:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i) \quad (a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = A - B\ i.$$

$$\frac{a_1 + b_1 i}{-a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(-a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = -A_1 - B_1\ i.$$

$$\frac{a_1 + b_1 i}{-a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(-a_2 + b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = -A + B\ i.$$

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i) \quad (a_2 + b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = A_1 + B_1\ i.$$

$$\frac{-a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(-a_1 + b_1 i) \quad (a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = -A_1 + B_1\ i.$$

$$\frac{-a_1 + b_1 i}{-a_2 + b_2 i} = \frac{(-a_1 + b_1 i)(-a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = A + B\ i.$$

$$\frac{-a_1 + b_1 i}{-a_2 - b_2 i} = \frac{(-a_1 + b_1 i)(-a_2 + b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = A_1 - B_1\ i.$$

$$\frac{-a_1 + b_1 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{(-a_1 + b_1 i) \quad (a_2 + b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = -A - B\ i.$$

$$\frac{(-a_1 - b_1 i)}{a_2 + b_2 i} = \frac{(-a_1 - b_1 i) \quad (a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = -A + B\ i.$$

$$\frac{-a_1 - b_1 i}{-a_2 + b_2 i} = \frac{(-a_1 - b_1 i)(-a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = A_1 + B_1\ i.$$

$$\frac{-a_1 - b_1 i}{-a_2 - b_2 i} = \frac{(-a_1 - b_1 i)(-a_2 + b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = A - B\,i.$$

$$\frac{-a_1 - b_1 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{(-a_1 - b_1 i)\quad(a_2 + b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = -A_1 - B_1\,i.$$

$$\frac{a_1 - b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 - b_1 i)\quad(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = A_1 - B_1\,i.$$

$$\frac{a_1 - b_1 i}{-a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 - b_1 i)(-a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = -A - B\,i.$$

$$\frac{a_1 - b_1 i}{-a_2 - b_2 i} = \frac{(a_1 - b_1 i)(-a_2 + b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = -A_1 + B_1\,i.$$

$$\frac{a_1 - b_1 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{(a_1 - b_1 i)\quad(a_2 + b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = A + B\,i.$$

w których

$$A = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}; \qquad B = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_2^2 + b_2^2};$$

$$A_1 = \frac{a_1 a_2 - b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}; \qquad B_1 = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Z wyników tych wyczytujemy następujące twierdzenie ogólne:

„Iloraz dwóch jakichkolwiek czynników wielorakich jest liczbą wieloraką; ten iloraz może być liczbą rzeczywistą, albo czysto urojoną, wedle tego, czy $B = 0$, czy $A_1 = 0$“.

Zestawiwszy zaś powyższe ilorazy, wysnuć możemy następujące twierdzenia szczególne:

„Jeżeli dzielna i dzielnik przedstawione są punktami znajdującymi się w drugim lub czwartym ćwiercianie pola liczbowego, iloraz dwóch liczb wielorakich jest liczbą wieloraką postaci $A + B\,i$. $\left(\frac{2}{4}\vdots\frac{2}{4}\right)$“.

„Iloraz dwóch liczb wielorakich jest liczbą wieloraką, mającą postać $A - B\,i$. $\left(\frac{1}{3}\vdots\frac{1}{3}\right)$, gdy dzielną i dzielnik przedstawiają punkty znajdujące się w ćwiercianie pierwszym, albo w trzecim pola liczbowego“.

„Iloraz dwóch liczb wielorakich jest liczbą wieloraką w postaci $-A + B\,i$. $\left(\frac{1}{3}\vdots\frac{3}{1}\right)$, jeżeli dzielną przedstawia punkt znajdujący się w pierwszym ćwiercianie pola liczbowego, a dzielnik

wyraża punkt w trzecim ćwierciany będący, albo gdy dzielnę oznacza punkt w trzecim ćwiercianie, a dzielnik przedstawia punkt w pierwszym ćwiercianie się znajdujący“.

„Iloraz dwóch liczb wielorakich jest liczbą wieloraką w formie — A — $B i. \binom{2:1}{4:2}$, gdy punkt w drugim ćwiercianie pola liczbowego się znajdujący, przedstawia dzielną, a punkt w ćwiercianie czwartym będący, wyraża dzielnik; albo gdy dzielnę oznacza punkt znajdujący się w ćwiercianie czwartym, a dzielnik przedstawia punkt, będący w ćwiercianie drugim pola liczbowego“.

„Jeżeli dzielnę przedstawia punkt będący w ćwiercianie pierwszym, a dzielnik oznacza punkt w ćwiercianie czwartym; albo jeżeli dzielnę oznacza punkt w ćwiercianie trzecim, a dzielnik wyraża punkt w ćwiercianie drugim pola liczbowego się znajdujący, wtedy iloraz dwóch liczb wielorakich, będący liczbą wieloraką, ma postać $A_1 + B_1$ i. $\binom{1:4}{3:2}$“.

„Iloraz dwóch liczb wielorakich ma postać $A_1 - B_1$ i. $\binom{2:3}{4:1}$, jeżeli dzielnę przedstawia punkt w ćwiercianie drugim się znajdujący, a dzielnik oznacza punkt będący w ćwiercianie trzecim pola liczbowego; albo gdy dzielnę wyraża punkt w ćwiercianie czwartym, a dzielnik przedstawia punkt w ćwiercianie pierwszym się znajdujący“.

„Iloraz dwóch liczb wielorakich jest liczbą wieloraką w postaci $- A_1 + B_1$ i. $\binom{2:1}{4:3}$, jeżeli dzielnę przedstawia punkt będący w ćwiercianie drugim pola liczbowego, a dzielnik wyraża punkt znajdujący się w ćwiercianie pierwszym; albo jeżeli dzielnę oznacza punkt będący w ćwiercianie czwartym, a dzielnik przedstawia punkt będący w ćwiercianie trzecim pola liczbowego“.

„Iloraz dwóch liczb wielorakich jest liczbą wieloraką w postaci $- A_1 - B_1$ i. $\binom{1:2}{3:4}$, jeżeli punkt w pierwszym ćwiercianie pola liczbowego będący, przedstawia dzielnę, a punkt w ćwiercianie drugim oznacza dzielnik; albo gdy dzielnę wyraża punkt w trzecim ćwiercianie się znajdujący, a dzielnik przedstawia punkt w czwartym ćwiercianie będący“.

Potęga całkowitego stopnia liczby wielorakiej.

Potęgując liczbę wieloraką (a + bi) przez liczby

1 2 3 4 5 6 . . . .

otrzymujemy następujące wyniki:

$(a+bi)^1 = a+bi;\ (-a+bi)^1 = -a+bi.$

$(-a-bi)^1 = -a-bi;\ (a-bi)^1 = a-bi.$

$(a+bi)^2 = (a^2-b^2)+2abi;\ (-a+bi)^2 = (a^2-b^2)-2abi.$

$(-a-bi)^2 = (a^2-b^2)+2abi;\ (a-bi)^2 = (a^2-b^2)-2abi.$

$(a+bi)^4 = a^4+4a^3bi+6a^2b^2i^2+4ab^3i^3+b^4i^4 =$
$= (a^4-6a^2b^2+b^4)+(4a^3b-4ab^3)i.$

$(-a+bi)^4 = a^4-4a^3bi+6a^2b^2i^2-4ab^3i^3+b^4i^4 =$
$= (a^4-6a^2b^2+b^4)-(4a^3b-4ab^3)i.$

$(-a-bi)^4 = (a^4-6a^2b^2+b^4)+(4a^3b-4ab^3)i.$

$(a-bi)^4 = a^4-4a^3bi+6a^2b^2i^2-4ab^3i^3+b^4i^4 =$
$= (a^4-6a^2b^2+b^4)-(4a^3b-4ab^3)i.$

$(a+bi)^6 = a^6+6a^5bi+15a^4b^2i^2+20a^3b^3i^3+$
$+15a^2b^4i^4+6ab^5i^5+b^6i^6 =$
$= (a^6-15a^4b^2+15a^2b^4-b^6)+(6a^5b-20a^3b^3+6ab^5)i.$

$(-a+bi)^6 = a^6-6a^5bi+15a^4b^2i^2-20a^3b^3i^3+15a^2b^4i^4-$
$-6ab^5i^5+b^6i^6 =$
$= (a^6-15a^4b^2+15a^2b^4-b^6)-(6a^5b-20a^3b^3+6ab^5)i.$

$(-a-bi)^6 = (a^6-15a^4b+15a^2b^4-b^6)+(6a^5b-20a^3b^3+6ab^5)i.$

$(a-bi)^6 = (a^6-15a^4b^2+15a^2b^4-b^6)-(6a^5b-20a^3b^3+6ab^5)i.$

i t. d., i t. d.

$(a+bi)^3 = a^3+3a^2bi+3ab^2i^2+b^3i^3 = (a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i.$

$(-a+bi)^3 = -a^3+3a^2bi-3ab^2i^2+b^3i^3 =$
$= -(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i.$

$(-a-bi)^3 = (-1)^3(a+bi)^3 = -(a^3-3ab^2)-(3a^2b-b^3)i.$

$(a-bi)^3 = a^3-3a^2bi+3ab^2i^2-b^3i^3 = (a^3-3ab^2)-(3a^2b-b^3)i.$

$(a+bi)^5 = a^5+5a^4bi+10a^3b^2i^2+10a^2b^3i^3+5ab^4i^4+b^5i^5 =$
$= (a^5-10a^3b^2+5ab^4)+(5a^4b-10a^2b^3+b^5)i.$

$(-a+bi)^5 = (-1)^5(a-bi)^5 = -(a^5-5a^4bi+10a^3b^2i^2-$
$-10a^2b^3i^3+5ab^4i^4-b^5i^5) =$
$= -(a^5-10a^3b^2+5ab^4)+(5a^4b-10a^2b^3+b^5)i.$

$(-a-bi)^5 = (-1)^5 (a+bi)^5 =$
$= -(a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4) - (5a^4b - 10a^2b^3 + b^5)i.$

$(a-bi)^5 = a^5 - 5a^4bi + 10a^3b^2i^2 - 10a^2b^3i^3 + 5ab^4i^4 - b^5i^5 =$
$= (a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4) - (5a^4b - 10a^2b^3 + b^5)i.$

$(a+bi)^7 = a^7 + 7a^6bi + 21a^5b^2i^2 + 35a^4b^3i^3 + 35a^3b^4i^4 +$
$+ 21a^2b^5i^5 + 7ab^6i^6 + b^7i^7 =$
$= (a^7 - 21a^5b^2 + 35a^3b^4 - 7ab^6) + (7a^6b - 35a^4b^3 +$
$+ 21a^2b^5 - b^7)i.$

$(-a+bi)^7 = -a^7 + 7a^6bi - 21a^5b^2i^2 + 35a^4b^3i^3 -$
$- 35a^3b^4i^4 + 21a^2b^5i^5 - 7ab^6i^6 + b^7i^7 =$
$= -(a^7 - 21a^5b^2 + 35a^3b^4 - 7ab^6) + (7a^6b - 35a^4b^3 +$
$+ 21a^2b^5 - b^7)i.$

$(-a-bi)^7 = (-1)^7 (a+bi)^7 =$
$= -(a^7 - 21a^5b^2 + 35a^3b^4 - 7ab^6) - (7a^6b - 35a^4b^3 +$
$+ 21a^2b^5 - b^7)i.$

$(a-bi)^7 = a^7 - 7a^6bi + 21a^5b^2i^2 - 35a^4b^3i^3 + 35a^3b^4i^4 -$
$- 21a^2b^5i^5 + 7ab^6i^6 - b^7i^7 =$
$= (a^7 - 21a^5b^2 + 35a^3b^4 - 7ab^6) - (7a^6b - 35a^4b^3 +$
$+ 21a^2b^5 - b^7)i.$

i t. d., i t. d.,

a wyniki te wyłaniają następujące twierdzenia:

„Parzystego stopnia potęga liczby wielorakiej, przedstawionej punktem znajdującym się w ćwiercianie pierwszym, albo w trzecim pola liczbowego, jest liczbą wieloraką w postaci:

$$(\pm a \pm bi)^{2n} = A + Bi“.$$

„Parzystego stopnia potęga liczby wielorakiej, przedstawionej punktem znajdującym się w ćwiercianie drugim, albo w czwartym pola liczbowego, jest liczbą wieloraką w postaci:

$$(\mp a \pm bi)^{2n} = A - Bi“.$$

„Potęga nieparzystego stopnia liczby wielorakiej, którą wyraża punkt znajdujący się w ćwiercianie pierwszym, jest liczbą wieloraką w postaci: $(a + bi)^{2n+1} = A_1 + B_1 i$“.

„Potęga nieparzystego stopnia liczby wielorakiej, którą oznacza punkt znajdujący się w ćwiercianie drugim pola liczbowego, jest liczbą wieloraką w postaci:

$$(-a + bi)^{2n+1} = -A_1 + B_1 i“.$$

„Nieparzystego stopnia potęga liczby wielorakiej, którą przedstawia punkt w ćwiercianie trzecim pola liczbowego się znajdujący, jest liczbą wieloraką w postaci:

$$(-a-bi)^{2n+1} = -A_1 - B_1 i“.$$

„Nieparzystego stopnia potęga liczby wielorakiej, którą wyraża punkt znajdujący się w ćwiercianie czwartym pola liczbowego, jest liczbą wieloraką w postaci:

$$(a-bi)^{2n+1} = A_1 - B_1 i“.$$

Pierwiastek kwadratowy liczby wielorakiej.

We wzorze znanym z nauki o liczbach niewymiernych:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

zamiast b, napisawszy $-b^2$:

$$\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \quad . \ . \ a).$$

Również mamy:

$$\sqrt{-a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \quad . \ . \ b).$$

więc z a) i b) wysnuwamy twierdzenie, że:

„Pierwiastek kwadratowy liczby wielorakiej jest także liczbą wieloraką, w postaci:

$$\sqrt{a \pm bi} = A \pm Bi \ . \ . \ . \ . \ a).$$

$$\sqrt{-a \pm bi} = B \pm Ai \ . \ . \ . \ . \ b)“.$$

Wyniki działań algebraicznych wielorakiemi liczbami sprzężonemi.

Dodając dwie wielorakie liczby sprzężone do siebie, otrzymujemy:

$$(a+bi) + (a-bi) = +2a.$$

$$(-a+bi) + (-a-bi) = -2a.$$

a odejmując je od siebie, mamy:

$$(a + bi) - (a - bi) = 2b.$$
$$(-a + bi) - (-a - bi) = 2b.$$

Zatem: „Suma dwóch wielorakich liczb sprzężonych jest liczbą rzeczywistą, równą podwójnej części rzeczywistej tychże ilości sprzężonych“.

„Różnica dwóch wielorakich liczb sprzężonych jest liczbą czysto urojoną, równą podwójnej części urojonej tychże liczb sprzężonych“.

Z pomnożenia przez siebie dwóch wielorakich liczb sprzężonych, wynika:

$$(a + bi)(a - bi) = (-a + bi)(-a - bi) = a^2 + b^2,$$

a z tego twierdzenie:

„Iloczyn dwóch wielorakich liczb sprzężonych jest liczbą rzeczywistą, równą kwadratowi modułu $r^2 = a^2 + b^2$“.

Dzieląc liczbę $(\pm a \pm bi)$ przez liczbę $(\pm a \mp bi)$, a liczbę $(\pm a \mp bi)$ przez liczbę $(\pm a \pm bi)$, uzyskujemy dwa wzory następujące:

$$\frac{\pm a \pm bi}{\pm a \mp bi} = \frac{(a + bi)^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{2ab}{a^2 + b^2}\, i \quad . \; . \; . \; \delta).$$

$$\frac{\pm a \mp bi}{\pm a \pm bi} = \frac{(a - bi)^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} - \frac{2ab}{a^2 + b^2}\, i \quad . \; . \; . \; \delta').$$

a z nich wyczytujemy twierdzenie:

„Iloraz dwóch wielorakich ilości sprzężonych jest nową liczbą wieloraką, jeżeli $a \gtrless b$; zaś równą jednostce urojonej, gdy $a = b$“.

Te same dwa wzory okazują, że algebraiczne ułamki: $\frac{a + bi}{a - bi}$ i $\frac{a - bi}{a + bi}$, będące wzajemnie odwróconemi wartościami, są wielorakiemi ilościami sprzężonemi.

Działania algebraiczno-geometryczne liczbami wielorakiemi.

Suma liczb wielorakich.

Poznawszy zasadnicze własności wyrażeń wielorakich, przejdźmy teraz do geometrycznego przedstawienia działań liczbami zespolonemi i zacznijmy od sumy.

Wiemy już, że:

$$a_1 + b_1 i = r_1 (\cos. \alpha_1 + i. \sin. \alpha_1),$$
$$a_2 + b_2 i = r_2 (\cos. \alpha_2 + i. \sin. \alpha_2).$$

Dodając te dwa wyrażenia do siebie, otrzymujemy sumę następującą:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) =$$
$$= (r_1 \cos. \alpha_1 + r_2 \cos. \alpha_2) + i. (r_1 \sin. \alpha_1 + r_2 \sin. \alpha_2),$$

albo pisząc:

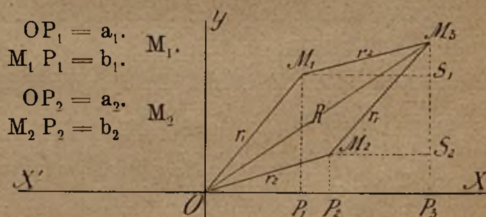
$$R. \cos. w = r_1. \cos. \alpha_1 + r_2. \cos. \alpha_2 \ . \ . \ . \ 1).$$
$$R. \sin. w = r_1. \sin. \alpha_1 + r_2. \sin. \alpha_2 \ . \ . \ . \ 2).$$

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = R. (\cos. w + i. \sin. w) \ . \ . \ . \ . \ a).$$

Podnosząc obie strony równań 1) i 2) do kwadratu i dodając następnie stronami, otrzymujemy kwadrat wynikowego modułu:

$$R^2 = r_1^2 + 2 r_1 r_2 \cos. (\alpha_1 - \alpha_2) + r_2^2 \ . \ . \ . \ 3),$$

któreto wyrażenie oznajmia, że sumę dwóch ilości wielorakich przedstawić można punktem na płaszczyźnie współrzędnych układu osi prostokątnych, a to sposobem następującym:



Wyznaczywszy dane ilości wielorakie punktami M_1 i M_2 na płaszczyźnie liczbowej i wykreśliwszy ich moduły

$$OM_1 = r_1,$$
$$OM_2 = r_2,$$

uzupełniamy na nich równoległobok $M_1 O M_2 M_3 M_1$,

który nazwać można równoległobokiem modułów. Wierzchołek tego równoległoboku M_3, przeciwległy zaczęciu O, wyraża sumę dwóch ilości wielorakich, a odcinek $OM_3 = R$, moduł wynikowy.

Część rzeczywistą tej to sumy przedstawia odcinek OP_3, a urojoną przystawa analityczna P_3M_3.

Ponieważ

$$\triangle . OM_1P_1 \cong \triangle . M_2M_3Q_2 \quad \text{i} \quad \triangle . OM_2P_2 \cong \triangle . M_3M_1Q_1,$$

przeto: $OP_1 = M_2Q_2 = P_2P_3$; $M_1P_1 = M_3Q_2 = Q_1P_3$.

$M_1Q_1 = P_1P_3 = OP_2$; $M_3Q_1 = M_2P_2 = Q_2P_3$,

więc: $OP_3 = OP_1 + P_1P_3 = OP_1 + OP_2 = A$,

albo: $OP_3 = OP_2 + P_2P_3 = OP_2 + OP_1 = A$,

$P_3M_3 = P_3Q_1 + Q_1M_3 = P_1M_1 + P_2M_2 = B$,

albo: $P_3M_3 = P_3Q_2 + Q_2M_3 = P_2M_2 + P_1M_1 = B$,

a wyniki te podają drugi sposób dodawania dwóch ilości wielorakich, bez kreślenia równoległoboku modułów.

Moduł sumy jest mniejszy od sumy modułów składowych, jeżeli $\alpha_1 \gtrless \alpha_1$.

Gdyby $\alpha_1 = \alpha_2$, to $R = r_1 + r_2$.

Jeżeli $\alpha_1 - \alpha_2 = \pm \pi$, wtedy $R = \pm (r_1 - r_2)$.

Wyznaczanie modułu wynikowego sposobem powyżej wskazanym, nazywa się dodawaniem geometrycznem modułów składowych.

Określenie dodawania geometrycznego takby opiewało:

„Dodać do ilości r_2, przedstawionej odcinkiem OM_2, co do wielkości i kierunku ilość r_1, przedstawioną odcinkiem OM_1, znaczy do skrajności odcinka OM_2 przyłożyć początek odcinka OM_1, bez zmiany kierunku“.

„Połączywszy początek O. odcinka pierwszego ze skrajnością M_3 drugiego, przyłożonego swoim początkiem O. do skrajności M_2, bez zmiany kierunku, linią prostą, otrzymujemy odcinek OM_3 na sumę geometryczną tychże dwóch odcinków“.

Jeżeli kierunki rzeczonych odcinków zlewają się w jeden, są jednakowe, albo wprost przeciwne, wtedy dodawanie geometryczne zamienia się na dodawanie algebraiczne.

Uwaga. W mechanice skladanie sił działających na jeden punkt przyłożenia w kierunkach, kąt φ. zawierających, odcinkami co do wielkości i kierunku wyrażonych, jest geometrycznem dodawaniem. Szukanie więc wynikowej siły, a wyznaczanie modułu sumy dwóch ilości wielorakich jest jednem działaniem geometrycznem.

Umiejąc geometrycznie dodawać do siebie dwie liczby wielorakie, zdołamy wskazanym sposobem zesumować trzy, cztery, pięć i więcej liczb takiego rodzaju; trzeba tylko sumę dwóch ilości uważać za jednę i do niej dołączyć trzecią, do nowej sumy dodać liczbę czwartą i t. d., i t. d. Ostatni moduł jest modułem sumy wszystkich liczb danych, a jego skrajność ich sumą.

Różnica liczb wielorakich.

Odjąwszy od ilości $a_1 + b_1 i = r_1 (\cos. \alpha_1 + i. \sin. \alpha_1)$, drugą $a_2 + b_2 i = r_2 (\cos. \alpha_2 + i. \sin. \alpha_2)$, otrzymujemy wynik następujący:

$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) =$$
$$= (r_1 \cos. \alpha_1 - r_2 \cos. \alpha_2) + i. (r_1 \sin. \alpha_1 - r_2 \sin. \alpha_2),$$

albo, pisząc:

$$R. \cos. w = r_1 \cos. \alpha_1 - r_2 \cos. \alpha_2 \quad . \ . \ . \ . \ 4).$$
$$R. \sin. w = r_1 \sin. \alpha_1 - r_2 \sin. \alpha_2 \quad . \ . \ . \ . \ 5).$$
$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = R. (\cos. w + i. \sin. w).$$

Z równań 4) i 5) wynika:

$$R^2 = r_1^2 - 2r_1 r_2 \cos. (\alpha_1 - \alpha_2) + r_2^2 \quad . \ . \ . \ 6).$$

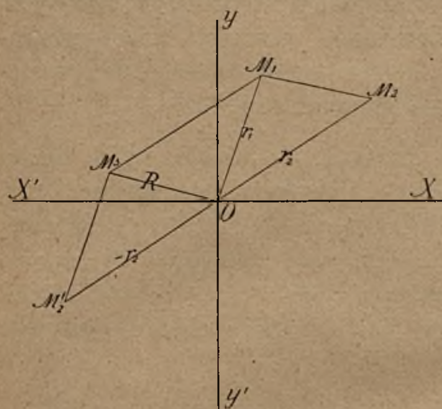
albo też:

$$R^2 = r_1^2 + 2r_1 r_2 \cos. (\alpha_1 - \alpha_2 - \pi) + r_2^2 \quad . \ . \ 6').$$

Ten ostatni wzór powiada, że odejmowanie geometryczne można zamienić na dodawanie, trzeba tylko w odjemniku zamienić znak dodatni na odjemny i odjemnik z tak zmienionym znakiem dodać do odjemnej.

Przedłużając tedy wstecz moduł OM_2 o własną jego długość aż do punktu M'_2, a na odcinkach OM_1 i OM'_2 uzupełnia-

jąc równoległobok $OM'_2M_3M_1O$, wyznaczymy na płaszczyźnie punkt M_3, wyrażający różnicę, której modułem jest odcinek OM_3.



Wyznaczanie modułu różnicy dwóch wielorakich ilości sposobem tutaj wskazanym, nazywa się odejmowaniem geometrycznem.

Wpatrując się w rysunek, przedstawiający trzy moduły: odjemnej, odjemnika i różnicy, wysnuwamy odejmowania geometrycznego określenie następujące:

„Od odcinka OM_1, danego co do wielkości i kierunku, odjąć dany odcinek drugi OM_2, znaczy do skrajności M_1 odcinka pierwszego przyłożyć początek O. odcinka drugiego w przeciwnym, ale do pierwotnego równoległym kierunku".

„Połączywszy początek O. pierwszego ze skrajnością M_3 drugiego odcinka tak przemieszczonego, otrzymujemy odcinek OM_3 na różnicę geometryczną".

Uwaga. Odejmowanie geometryczne odcinków, danych co do wielkości i kierunku, jest analogiczne rozkładaniu siły na dwie składowe pod kątem działające.

Iloczyn wielorakich czynników, mających postać trygonometryczną.

Z pomnożenia ilości wielorakiej:

$$(a_1 + b_1 i) = r_1 (\cos. \alpha_1 + i. \sin. \alpha_1),$$

przez ilość wieloraką: $(a_2 + b_2 i) = r_2 (\cos. \alpha_2 + i. \sin. \alpha_2)$, wynika iloczyn przedstawiony wzorem następującym:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) =$$
$$= r_1 r_2 (\cos. \alpha_1 + i. \sin. \alpha_1)(\cos. \alpha_2 + i. \sin. \alpha_2) =$$
$$= r_1 r_2 [(\cos. \alpha_1 \cos. \alpha_2 - \sin. \alpha_1 \sin. \alpha_2) +$$
$$+ i. (\sin. \alpha_1 \cos. \alpha_2 + \cos. \alpha_1 \sin. \alpha_2)] =$$
$$= r_1 r_2 [\cos. (\alpha_1 + \alpha_2) + i. \sin. (\alpha_1 + \alpha_2)].$$

Napisawszy teraz $r_1 r_2 = R$; $\alpha_1 + \alpha_2 = \varphi$, pomnóżmy ten iloczyn, przybierający postać $R. (\cos. \varphi + i. \sin. \varphi)$, przez trzeci czynnik wieloraki $(a_3 + b_3 i) = r_3 (\cos. \alpha_3 + i. \sin. \alpha_3)$.

Nowy iloczyn ma taką samą postać, jaką ma poprzedzający, a mianowicie:

$$(a_1 + b_1 i) (a_2 + b_2 i) (a_3 + b_3 i) =$$
$$= R. r_3 [\cos. (\varphi + \alpha_3) + i. \sin. (\varphi + \alpha_3)] =$$
$$= r_1 r_2 r_3 [\cos. (\alpha_1 + \alpha_2 + {}_3) + i. \sin. (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)].$$

Temu iloczynowi nadawszy poprzednią postać przez napisanie $r_1 r_2 r_3 = R$; $a_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \varphi$, pomnóżmy go przez czynnik czwarty, a otrzymamy iloczyn czterech czynników wielorakich, następujący:

$$(a_1 + b_1 i) (a_2 + b_2 i) (a_3 + b_3 i) (a_4 + b_4 i) =$$
$$= R. r_4 [\cos. (\varphi + \alpha_4) + i. \sin. (\varphi + \alpha_4)] =$$
$$= r_1 r_2 r_3 r_4 [\cos. (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2 + \alpha_4) + i. \sin. (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)].$$

Takim samym sposobem utworzymy wzór wyrażający iloczyn pięciu, sześciu, siedmiu ... n. czynników wielorakich, mających postać trygonometryczną. Będzie więc ogólny wzór taki:

$$A) \ldots (a_1 + b_1 i) (a_2 + b_2 i) (a_3 + b_3 i) \ldots (a_n + b_n i) =$$
$$= r_1 r_2 r_3 \ldots r_n [\cos. (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n) +$$
$$+ i. (\sin. (\alpha_1 + \alpha_2 + a_3 + \ldots + \alpha_n)].$$

z którego wyczytujemy następujące twierdzenie:

„Mnożymy wielorakie liczby w postaci trygonometrycznej, mnożąc ich moduły, a dodając argumenty“.

Użytek wyrażeń urojonych.

Sprawdzenie prawidła znaków przy mnożeniu algebraicznem.

Powyższa teorya mnożenia liczb wielorakich w postaci trygonometrycznej, sprawdza prawidło znaków algebraicznych, jakie przybierać muszą iloczyny liczb algebraicznych.

Widzieliśmy wyżej, że ilości rzeczywiste są szczególnymi przypadkami ilości wielorakich. Weźmy tedy na uwagę dwie ilości rzeczywiste A. i B. jakiekolwiek, których wielkościami

samoistnemi (bezwzględnemi) są „a“ i „b“, i nadajmy im postać wieloraką, następującą:

$$A = a. (\cos. n \pi + i. \sin. n \pi) \ldots \ldots a).$$
$$B = b. (\cos. n_1 \pi + i. \sin. n_1 \pi) \ldots \ldots b).$$

W tych to wzorach głoski „n“ i „n_1“ oznaczają dowolne ilości całkowite i dodatnie, ale rzeczywiste.

Pomnożywszy stronami przez siebie równania a) i b), otrzymujemy wzór następujący:

$$A.B = ab. [\cos. (n + n_1) \pi + i. \sin. (n + n_1) \pi] \ldots c).$$

Roztrząśnijmy ten ogólny wzór, przedstawiający iloczyn dwóch ilości rzeczywistych.

1) Jeżeli $n = o$ i $n_1 = o$, wtedy z a) i b) mamy:

$$A = a. (\cos. o + i. \sin. o) = + a.$$
$$B = b. (\cos. o + i. \sin. o) = + b,$$

a z c):

$$A.B = (+ a) (+ b) = ab. (\cos. o + i. \sin. o) \ldots \alpha).$$

Wzór ten okazuje, że moduł iloczynu „ab“ zlewa się z osią odcinków analitycznych po stronie dodatniej, dlatego jest ilością dodatnią; a zatem: $(+ a) (+ b) = + (ab)$, t. z. iloczyn dwóch czynników dodatnich jest liczbą dodatnią.

2) Jeżeli $n = 1$, a $n_1 = o$, wtedy z a) i b) mamy:

$$A = a. (\cos. \pi + i. \sin. \pi) = - a.$$
$$B = b. (\cos. o + i. \sin. \pi) = + b,$$

a z c):

$$A.B = (- a) (+ b) = ab. (\cos. \pi + i. \sin. \pi).$$

Ten wynik dowodzi, że moduł iloczynu („ab“) zlewa się z osią odcinków analitycznych po stronie odjemnej, dlatego musi być odjemną liczbą; a zatem: $(- a) (+ b) = - (ab)$, t. z. iloczyn dwóch czynników, z których pierwszy, będący mnożną, jest odjemny, a drugi, będący mnożnikiem, jest dodatni, jest liczbą odjemną.

3) Jeżeli $n = o$, a $n_1 = 1$, wtedy:

$$A = a. (\cos. o + i. \sin. o) = + a.$$
$$B = b. (\cos. \pi + i. \sin. \pi) = - b,$$

a ich iloczyn będzie z c):

$$A.B = (+ a) (- b) = ab. (\cos. \pi + i. \sin \pi).$$

Ten wynik okazuje, że i w tym razie moduł („ab") zlewa się z osią odcinków po stronie odjemnej, więc liczbą jest odjemną; a zatem: $(+a)(-b) = -(ab)$, t. z. liczba dodatnia pomnożona przez liczbę odjemną, wydaje iloczyn odjemny.

4) Jeżeli ostatecznie $n = 1$ i $n_1 = 1$, wtedy:

$$A = a. (\cos. \pi + i. \sin. \pi) = - a.$$
$$B = b. (\cos. \pi + i. \sin. \pi) = - b.$$

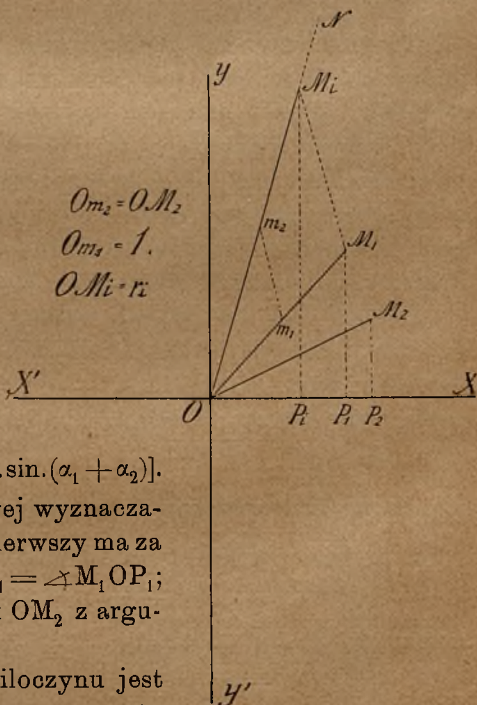
a z c) otrzymujemy:

$$A. B = (-a)(-b) = ab. (\cos. 2\pi + i. \sin. 2\pi),$$

co powiada, że moduł („ab") zlewa się z osią odcinków analitycznych po stronie dodatniej, więc musi być liczbą dodatnią; a zatem: $(-a)(-b) = +(ab)$, t. z. iloczyn dwóch czynników odjemnych jest liczbą dodatnią.

Wykreślenie iloczynu ilości wielorakich.

Powyższa teorya mnożenia uczy nas także jak mamy iloczyn kilku czynników zespolonych, we formie trygonometrycznej będących, wykreślić na płaszczyźnie liczbowej.



Dla łatwiejszego zrozumienia rzeczy, weźmy na uwagę iloczyn dwóch czynników następujący:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) =$$
$$= r_1 r_2 [\cos. (\alpha_1 + \alpha_2) + i. \sin. (\alpha_1 + \alpha_2)].$$

Na płaszczyźnie liczbowej wyznaczamy oba czynniki M_1 i M_2. Pierwszy ma za moduł OM_1 z argumentem $\alpha_1 = \measuredangle M_1OP_1$; drugi ma za moduł odcinek OM_2 z argumentem $\alpha_2 = \measuredangle M_2OP_2$.

Ponieważ argumentem iloczynu jest $\alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2$, przeto do argumentu

$\alpha_1 = \measuredangle M_1OP_1$, dodajemy geometrycznie argument $\alpha_2 = \measuredangle M_2OP_2$, kładąc ramię OP_2 na ramieniu OM_1, przez co otrzymujemy argument iloczynu $\alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 = \measuredangle P_1OM_1 + \measuredangle M_1ON$, poczem odmierzamy na ramieniu ON moduł iloczynu $r_i = r_1 r_2 = OMi$.

Wielkość geometryczną rzeczonego modułu wyznaczymy zamieniając $r_i 1 = r_1 r_2$, na proporcyę: $1 : r_1 = r_2 : r_i$. Odznaczywszy na module $r_1 = OM_1$ odcinek $Om_1 = 1$, a na ramieniu ON moduł $r_2 = Om_2 = OM_2$, łączymy skrajności tychże odcinków prostą $m_1 m_2$ i przez skrajność M_1 modułu r_1, kreślimy do $m_1 m_2$ równoległą, która na prostej ON, wyznacza punkt Mi, przedstawiający iloczyn $(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)$, którego modułem jest odcinek OMi.

Że OMi jest szukanym modułem r_i, okazuje się z podobieństwa dwóch trójkątów M_1OM_2 i m_1Om_2, z którego wynika proporcya $Om_1 : OM_1 = Om_2 : OMi$. Wyrazy tej proporcyi są $Om_1 = 1$; $OM_1 = r_1$ $OM_2 = r_2$, przeto $1 : r_1 = r_2 : OMi$, a więc $r_i = OMi$. c. b. d. d.

To przedstawienie geometryczne iloczynu dwóch czynników wielorakich, daje się łatwo rozciągnąć do iloczynu ilukolwiek czynników. Trzeba naprzód wykreślić dwóch pierwszych czynników iloczyn, uważać go za nowy czynnik i szukać iloczynu jego i czynnika trzeciego, sposobem wskazanym. Tak wyznaczony iloczyn znowu uważamy za zwykły czynnik i szukamy jego i czwartego czynnika iloczynu i t. d., i t. d. postępując, dojdziemy do iloczynu wszystkich czynników.

Iloczyn ten przedstawia zatem punkt Mi, leżący na płaszczyźnie liczbowej, którego współrzędnymi w układzie biegunowym są: argument $\alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ i moduł jako promień wodzący: $r_i = r_1 r_2 r_3 \ldots r_n = OMi$.

Iloraz liczb wielorakich w postaci trygonometrycznej.

Z podzielenia liczby wielorakiej:

$$(a_1 + b_1 i) = r_1 (\cos. \alpha_1 + i. \sin. \alpha_1),$$

przez drugą liczbę wieloraką:

$$(a_2 + b_2 i) = r_2 (\cos. \alpha_2 + i. \sin. \alpha_2),$$

wypada iloraz następujący:

$$\frac{a_1 + bi_1}{a_2 + b_2 i} = \frac{r_1 (\cos. \alpha_1 + i. \sin. \alpha_1)}{r_2 (\cos. \alpha_2 + i. \sin. \alpha_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \frac{(\cos. \alpha_1 + i. \sin. \alpha_1)(\cos. \alpha_2 - i. \sin. \alpha_2)}{(\cos. \alpha_2 + i. \sin. \alpha_2)(\cos. \alpha_2 - i. \sin. \alpha_2)} =$$

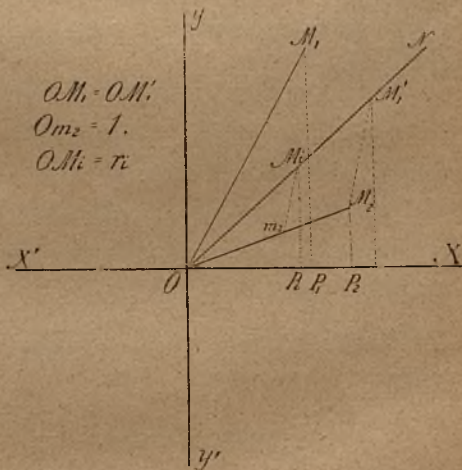
$$= \frac{r_1}{r_2} \left[\cos. (\alpha_1 - \alpha_2) + i. \sin. (\alpha_1 - \alpha_2) \right] \ldots \text{B)}.$$

Z tego to wzoru B), wyczytujemy następujące twierdzenie: „Liczbę wieloraką, w postaci trygonometrycznej wyrażoną, dzielimy przez drugą takiego rodzaju liczbę wieloraką, dzieląc moduł dzielnej przez moduł dzielnika, a od argumentu dzielnej odejmując argument dzielnika.

Wzór B):

$$\frac{r_1 (\cos. \alpha_1 + i. \sin. \alpha_1)}{r_2 (\cos. \alpha_2 + i. \sin. \alpha_2)} = \frac{r_1}{r_2} \left[\cos. (\alpha_1 - \alpha_2) + i. \sin. (\alpha_1 - \alpha_2) \right]$$

uczy nas także wykreślać iloraz dwóch jakichkolwiek liczb wielorakich w postaci tryogonometrycznej.



Wykreślenie to daje się uskutecznić sposobem następującym:

Na płaszczyźnie liczbowej wyznaczywszy dzielną M_1 i dzielnik M_2 od argumentu dzielnej

$\alpha_1 = \measuredangle M_1OP_1$,

odejmujemy geometrycznie argument dzielnika

$\alpha_2 = \measuredangle M_2OP_2$,

t. z. ramię OP_2 kąta M_2OP_2 kładziemy na ramię OM_1 kąta M_1OP_1, a płaszczyznę kąta pierwszego około OM_1 jako osi obracamy o 180^0, przez co ramię jego OM_2 zajmie położenie prostej ON. między modułami OM_1 i OM_2. Na tej prostej ON. odcinamy moduł

$$r = \frac{r_1}{r_2} = OM.$$

Wielkość modułu OM, a zarazem punkt M. przedstawiający iloraz dwóch ilości danych łatwo znajdziemy przerobiwszy proporcyę: $\frac{r}{1} = \frac{r_1}{r_2}$ na dogodniejszą do wykreślenia $\frac{r_2}{1} = \frac{r_1}{r}$. Odmierzamy tedy na prostej ON. odcinek $OM'_1 = OM_1$, a na module OM_2 odcinek $Om_2 = 1.$; połączywszy skrajności M_1 i M_2 kreślimy przez punkt m_2 równoległą do prostej M_2 M'_1., która przecina prostę ON w punkcie szukanym M. i wyznacza moduł ilorazu OM.

Potęga całkowitego stopnia liczby wielorakiej i pierwiastek.

Wzór przedstawiający iloczyn ilukolwiek czynników wielorakich, w postaci trygonometrycznej będących np. w ilości „m“:

$$I = r_1 r_2 r_3 \ldots r_m \, [\cos. (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_m) + i. \sin. (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_m)],$$

staje się, jeżeli wszystkie czynniki są równe, nowym wzorem:

$$L^m = r^m \, [\cos. m\alpha + i. \sin. m\alpha] \ldots\ldots B),$$

który wyraża całkowitego stopnia potęgę liczby wielorakiej następującej:

$$L = r. (\cos. \alpha + i. \sin. \alpha) \ldots A).$$

Rzuciwszy okiem na oba wzory powyższe A) i B), zaraz wyczytujemy twierdzenie:

„Liczbę wieloraką w postaci trygonometrycznej, potęgujemy przez jakąś dodatnią liczbę całą „m“ potęgując nią moduł a mnożąc argument“.

Liczbę $L = r (\cos. \alpha + i. \sin. \alpha)$ można wyrazić także następującym wzorem:

$$L = \left[\sqrt[m]{r} \left(\cos. \frac{\alpha}{m} + i. \sin. \frac{\alpha}{m}\right)\right]^m =$$

$$= r \left(\cos. m. \frac{\alpha}{m} + i. \sin. m. \frac{\alpha}{m}\right) \ldots\ldots A')$$

Jeżeli teraz równania:

$$L = \left[\sqrt[m]{r} \left(\cos. \frac{\alpha}{m} + i. \sin. \frac{\alpha}{m}\right)\right]^m$$

obie strony spierwiastkujemy przez dodatnią liczbę całą „m“, otrzymujemy wzór następujący:

$$C) \ldots \sqrt[m]{L} = \sqrt[m]{r.}\left(\cos.\frac{\alpha}{m} + i.\sin.\frac{\alpha}{m}\right),$$

wyrażający m-tego stopnia pierwiastek liczby wielorakiej:

$$A) \ldots L = r. (\cos. \alpha + i. \sin. \alpha).$$

Ze wzoru C), wyczytujemy twierdzenie:

„Liczbę wieloraką pierwiastkujemy przez dodatnią liczbę całą, pierwiastkując nią moduł a dzieląc argument“.

Pamiętając, że $L^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{L^m}$, mamy jeszcze wzór następujący:

$$D) \ldots L^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{r^m (\cos. m\alpha + i \sin. m\alpha)} =$$

$$= \sqrt[n]{r^m.}\left(\cos.\frac{m\alpha}{n} + i.\sin.\frac{m\alpha}{n}\right)$$

Stąd twierdzenie:

„Liczbę wieloraką w postaci trygonometrycznej, potęgujemy ułamkiem, podobnie jak liczbę rzeczywistą, potęgując ją licznikiem, a pierwiastkując mianownikiem“.

Wyrażenie: $L = r. (\cos. \alpha + i. \sin. \alpha) \ldots A)$

bierze postać równoważną:

$$L = r [\cos. (\alpha + 2n. \pi) + i \sin. (\alpha + 2n. \pi)] \ldots A')$$

albowiem funkcya trygonometryczna nie zmienia wartości, gdy łuk będący miarą kąta, wykreślony między jego ramionami promieniem koła jednostkę długości wynoszącym, powiększymy o dowolną ilość całkowitych okręgów $2n\,\pi = n.\,360^0$.

Teraz pierwiastkując przez dodatnią liczbę całą „m“ obie strony równania A'), otrzymujemy wzór następujący:

$$\sqrt[m]{L} = \sqrt[m]{r.}\left(\cos.\frac{\alpha + 2n\,\pi}{m} + i.\sin.\frac{\alpha + 2n\,\pi}{m}\right) \ldots C',$$

przedstawiający m-tego stopnia pierwiastek liczby wielorakiej:

$$L = r. (\cos. \alpha + i. \sin. \alpha) \ldots A).$$

We wzorze poprzedzającym, podzieliwszy argument „m“, spostrzeżemy zaraz, że druga strona tego wzorn jest iloczynem

dwóch czynników: $\sqrt[m]{r.}\left(\cos.\frac{\alpha}{m}+i.\sin.\frac{\alpha}{m}\right)$

$$\text{i}\quad 1.\left(\cos.\frac{2n\pi}{m}+i.\sin.\frac{2n\pi}{m}\right),$$

przeto będziemy mieli jeszcze formułkę następującą:

$$\sqrt[m]{L}=\sqrt[m]{r.}\left(\cos.\frac{\alpha}{m}+i.\sin.\frac{\alpha}{m}\right)\left(\cos.\frac{2n\pi}{m}+i.\sin.\frac{2n\pi}{m}\right)\ldots C''),$$

w której czynnik $\sqrt[m]{r.}\left(\cos.\frac{\alpha}{m}+i.\sin.\frac{\alpha}{m}\right)$, będący arytmetycznym pierwiastkiem m-tego stopnia liczby wielorakiej, jest ilością stałą, drugi zaś $1.\left(\cos.\frac{2n\pi}{m}+i.\sin.\frac{2n\pi}{m}\right)$, będący tegoż stopnia pierwiastkiem rzeczywistej jednostki dodatniej, jest ilością zmienną, zawisłą od wartości, jaką liczba dowolna „n" bierze.

Ilość dowolna „n" przybierając wartości:

$$n=0,\ 1,\ 2.\ 3,\ 4\ldots(m-1),$$

wydaje kolejno czynnika zmiennego argumenty, których wstawy i dostawy różne mają wielkości; a jeżeli ilość dowolna „n" wzrastać będzie tworząc następujący szereg:

$$m,\ m+1,\ m+2,\ m+3,\ m+4\ldots,$$

wtedy wyda szereg argumentów, których wstawy i dostawy mają takie same wartości, jakie miały wstawy i dostawy argumentów z poprzedzających podstawień wynikające. Zatem jasną jest rzeczą, że ilość dowolna „n" tylko następujące może mieć wartości:

$$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots(m-1),$$

które wydają „m", różnych wartości na m-tego stopnia pierwiastki dodatniej jednostki rzeczywistej.

Ponieważ jednostka, dopiero wymieniona, ma różne m-tego stopnia pierwiastki w ilości „m", przeto i liczba wieloraka:

$$A)\ldots L=r.\ [\cos.(\alpha+2n\pi)+i.\sin.(\alpha+2n\pi)]$$

ma „m", tóżnych tegoż stopnia pierwiastków zawartych we wzorze:

$$\sqrt[m]{L}=\sqrt[m]{r.}\left(\cos.\frac{\alpha}{m}+i.\sin.\frac{\alpha}{m}\right)\left(\cos.\frac{2n\pi}{m}+i.\sin.\frac{2n\pi}{m}\right),$$

które wyznaczymy mnożąc pierwiastek arytmetyczny liczby wielorakiej przez wartości, jakie bierze zmienny czynnik:

$$\left(\cos. \frac{2n\,\pi}{m} + i.\ \sin. \frac{2n\,\pi}{m}\right),$$

gdy liczba „n“ staje się kolejno:

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ .\ .\ .\ (m - 1).$$

Użytek wyrażeń urojonych.

Pierwiastki dowolnego stopnia liczb rzeczywistych.

Podstawiając we wzorze:

$$A)\ .\ .\ .\ L = r.\ (\cos.\ \alpha + i.\ \sin.\ \alpha)$$

naprzód $\alpha = 2n.\,\pi$, a potem $\alpha = (2n + 1)\,\pi$ otrzymujemy z niego dwa następujące:

$$a)\ .\ .\ .\ + r. = r.\ (\cos.\ 2n\,\pi + i.\ \sin.\ 2n\,\pi);$$

$$b)\ .\ .\ .\ - r. = r.\ [\cos.\ (2n + 1)\,\pi + i.\ \sin.\ (2n + 1)\,\pi],$$

z których pierwszy, jak wiadomo już, przedstawia dodatnią, a drugi odjemną liczbę rzeczywistą.

Pierwiastki m-tego stopnia liczby pierwszej wyznacza wzór:

$$\alpha)\ .\ .\ .\ \sqrt[m]{+ r.} = \sqrt[m]{r.}\left(\cos. \frac{2n\,\pi}{m} + i.\ \sin. \frac{2n\,\pi}{m}\right)$$

drugiej zaś wzór:

$$\beta)\ .\ .\ .\ \sqrt[m]{- r.} = \sqrt[m]{r.}\left[\cos. \frac{(2n + 1)\,\pi}{m} + i.\ \sin. \frac{(2n + 1)\,\pi}{m}\right]$$

Obydwa te wzory wskazują, że liczby rzeczywiste mają różne dowolnego stopnia pierwiastki i tyle, ile ma jednostek wykładnik pierwiastkowy.

Te pierwiastki wyznaczymy, podstawiając we wzorze α) dla liczby dodatniej, a we wzorze β) dla odjemnej kolejno:

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ .\ .\ .\ (m - 1),$$

Z tych pierwiastków, niektóre są rzeczywistemi, a niektóre urojonemi liczbami, według tego czy wartość za „n“ podstawiona w α) wydaje, $\sin. \frac{2n\,\pi}{m} = 0$, a we wzorze β) czyni

$\sin. \frac{(2n+1)\pi}{m}$ 0, czy też we wzorze α) $\sin. \frac{2n\pi}{m} \lesseqgtr 0$, a we wzorze β) $\sin. \frac{(2n+1)\pi}{m} \lesseqgtr 0$.

Zobaczmy teraz, jaką wartość nadać trzeba dowolnej liczbie „n", aby wstawy argumentów we wzorze α) i we wzorze β) stały się zerami.

We wzorze α), staje się $\sin. \frac{2n\pi}{m} = 0$, gdy: albo $\frac{2n\pi}{m} = 0$, co pociąga za sobą $n = o$, albo $\frac{2n\pi}{m} = \pi$, a to wymaga $n = \frac{m}{2}$.

Jeśli tedy wykładnik pierwiastkowy jest liczbą parzystą, natenczas liczba dodatnia, wzorem α) przedstawiona, ma dwa rzeczywiste pierwiastki równe, ale znaków przeciwnych; jeśli zaś wykładnik pierwiastkowy jest liczbą nieparzystą, wtedy liczba dodatnia ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty.

We wzorze β), staje się $\sin. \frac{(2n+1)\pi}{m} = 0$, tylko wtedy gdy $\frac{(2n+1)\pi}{m} = \pi$, co wymaga $n = \frac{m-1}{m}$ a zarazem wskazuje, że wykładnik pierwiastkowy musi być liczbą nieparzystą, jeżeli liczba odjemna ma mieć rzeczywisty danego stopnia pierwiastek.

Zebrawszy to wszystko, wysnuwamy twierdzenie:

„Rzeczywista liczba dodatnia ma tyle danego stopnia pierwiastków, ile jednostek ma wykładnik pierwiastkowy; jeżeli ten wykładnik jest liczbą parzystą, natenczas danej liczby są dwa pierwiastki rzeczywiste równe, ale znaków przeciwnych, a inne są urojone; jeżeli zaś wykładnik pierwiastkowy jest nieparzystą liczbą, natenczas jeden tylko pierwiastek liczby danej jest rzeczywisty, a inne są urojone".

„Rzeczywista liczba odjemna, ma tylko jeden rzeczywisty danego stopnia pierwiastek, gdy wykładnik pierwiastkowy jest liczbą nieparzystą, inne pierw. są urojone; jeżeli wykładnik pierwiastkowy jest liczbą parzystą, wszystkie danej liczby pierwiastki są urojone".

Pierwiastek kwadratowy liczby czysto urojonej.

Przedstawiając liczbę czysto urojoną $\pm\sqrt{-b}$, wzorem goniometrycznym, jako liczbę wieloraką, możemy, pierwiastku-

jąc ją przez liczbę 2, sprawdzić znane nam już wyrażeina następujące:

$$\pm\sqrt{+\sqrt{-b}} = \pm\sqrt[4]{\frac{b}{4}}\cdot(1+i)\;.\;.\;.\;.\;\alpha),$$

$$\mp\sqrt{-\sqrt{-b}} = \mp\sqrt[4]{\frac{b}{4}}\cdot(1-i)\;.\;.\;.\;.\;\beta).$$

Jakoż równości:

$$+\sqrt{-b} = \sqrt{b}.\left[\cos.\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)+i.\sin.\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right]\;.\;.\;.\;a),$$

$$-\sqrt{-b} = \sqrt{b}.\left[\cos.\left(\frac{3\pi}{2}+2n\pi\right)+i.\sin.\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right]\;.\;.\;.\;b),$$

pierwiastkując przez 2, otrzymujemy z nich wzory:

$$\sqrt{+\sqrt{-b}} = \sqrt[4]{b}.\left[\cos.\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right)+i.\sin.\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right)\right]\;.\;.\;.\;c),$$

$$\sqrt{-\sqrt{-b}} = \sqrt[4]{b}.\left[\cos.\left(\frac{3\pi}{4}+n\pi\right)+i.\sin.\left(\frac{3\pi}{4}+n\pi\right)\right]\;.\;.\;.\;d),$$

z których podstawienie: $n=o$ i $n=1$, wydaje z c) wyniki następujące:

$$\sqrt{+\sqrt{-b}} = \sqrt[4]{b}.\left(\cos.\frac{\pi}{4}+i.\sin.\frac{\pi}{4}\right) = +\sqrt[4]{\frac{b}{4}}\cdot(1+i)$$

$$\alpha).$$

$$\sqrt{+\sqrt{-b}} = \sqrt[4]{b}.\left[\cos.\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)+i.\sin.\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)\right] = -\sqrt[4]{\frac{b}{4}}\cdot(1-i)$$

zaś z d) wyniki:

$$\sqrt{-\sqrt{-b}} = \sqrt[4]{b}.\left(\cos.\frac{3\pi}{4}+i.\sin.\frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt[4]{b}.\left[\cos.\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i.\sin.\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right] = -\sqrt[4]{\frac{b}{4}}\cdot(1-i),$$

$$\beta).$$

$$\sqrt{-\sqrt{-b}} = \sqrt[4]{b}.\left[\cos.\left(\frac{3\pi}{4}+\pi\right)+i.\sin.\left(\frac{3\pi}{4}+\pi\right)\right] =$$

$$= \sqrt[4]{b}.\left[\cos.\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i.\sin.\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right] = +\sqrt[4]{\frac{b}{4}}\cdot(1-i),$$

inną drogą już uzyskane.

Pierwiastki kwadratowe liczb wielorakich.

Również możemy sprawdzić znane wzory:

$$\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \pm i. \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \quad \ldots a),$$

$$\sqrt{-a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \pm i. \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \quad \ldots b),$$

nadając ilościom wielorakim postać goniometryczną i pierwiastkując przez liczbę 2.

Jakoż przez 2 pierwiastkując naprzód wyrażenie:

$$a + bi = r. [\cos. (\alpha + 2n\pi) + i. \sin. (\alpha + 2n\pi)],$$

otrzymujemy wzór następujący:

$$\sqrt{a + bi} = \sqrt{r}. \left[\cos. \left(\frac{\alpha}{2} + n\pi\right) + i. \sin. \left(\frac{\alpha}{2} + n\pi\right)\right] \quad \ldots A).$$

Podstawienie w nim n = o, wydaje:

$$\sqrt{a + bi} = \sqrt{r}. \left(\cos. \frac{\alpha}{2} + i. \sin. \frac{\alpha}{2}\right) \quad \ldots . \alpha).$$

Zaś podstawienie n = 1:

$$\sqrt{a + bi} = \sqrt{r}. \left[\cos. \left(\frac{\alpha}{2} + \pi\right) + i. \sin. \left(\frac{\alpha}{2} + \pi\right)\right] =$$

$$= \sqrt{r}. \left[- \cos. \frac{\alpha}{2} - i. \sin. \frac{\alpha}{2}\right] \quad \ldots . \beta),$$

a że: $\cos. \alpha = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

więc: $\cos. \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{r + a}{2r}} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2r}}$

$\sin. \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{r - a}{2r}} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2r}}$

przeto ze wzorów α) i β), wyłania się wzór podwójny:

$$\pm \sqrt{a + bi} = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \pm i. \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 - b^2} - a}{2}}$$

dowodzący, że kwadratowy pierwiastek liczby wielorakiej ma dwie wartości równe, ale sobie przeciwne.

Pierwiastkując przez 2 wyrażenie:

$$a - bi = r. [\cos. (2n\pi - \alpha) + i. \sin. (2n\pi - \alpha),$$

otrzymujemy z niego wzór:

$$\sqrt{a - bi} = \sqrt{r.} \left[\cos. \left(n\pi - \frac{\alpha}{2}\right) + i. \sin. \left(n\pi - \frac{\alpha}{2}\right)\right] \ldots B),$$

który przez podstawienie n = o, wydaje wynik:

$$\sqrt{a - bi} = \sqrt{r.} \left(\cos. \frac{\alpha}{2} - i. \sin. \frac{\alpha}{2}\right) \ldots \alpha'),$$

a przez podstawienie n = 1, drugi:

$$\sqrt{a - bi} = \sqrt{r.} \left(- \cos. \frac{\alpha}{2} + i. \sin. \frac{\alpha}{2}\right) \ldots \beta'),$$

a z α') i β') wypływa drugi wzór podwójny:

$$\pm \sqrt{a - bi} = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \mp i. \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}.$$

Przejdźmy teraz do: $\sqrt{- a \pm bi}$.

Wyrażenie:

$$- a + bi = r. \{[\cos. [(2n + 1)\pi - \alpha] + i. \sin. [(2n + 1)\pi - \alpha]]\},$$

spierwiastkowane przez 2, wydaje wzór następujący:

$$\sqrt{a + bi} = \sqrt{r.} \left\{\left[\cos. \left[\frac{2n + 1}{2}\pi - \frac{\alpha}{2}\right] + i. \sin. \left[\frac{2n + 1}{2}\pi - \frac{\alpha}{2}\right]\right]\right\} . C).$$

Jeżeli w nim podstawimy n = o, to otrzymamy wyrażenie:

$$\sqrt{- a + bi} = \sqrt{r.} \left[\cos. \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + i. \sin. \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \sqrt{r.} \left(\sin. \frac{\alpha}{2} + i. \cos. \frac{\alpha}{2}\right) \ldots \alpha''),$$

a jeżeli n = 1, wtedy będziemy mieli:

$$\sqrt{- a + bi} = \sqrt{r.} \left[\cos. \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + i. \sin. \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right] =$$

$$= \sqrt{r.} \left[\cos. \left(- \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + 2\pi\right) + i. \sin. \left(- \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + 2\pi\right)\right] =$$

$$= \sqrt{r.} \left[\cos. \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) - i. \sin. \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)\right] \ldots \beta''),$$

a z α'') i β'') mamy wzór podwójny:

$$\pm\sqrt{-a+bi} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \pm i.\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}.$$

Wyrażenie:

$$-a-bi = r.\,|[\cos.\,[(2n+1)\pi+\alpha] + i.\sin.\,[(2n+1)\pi+\alpha]|,$$

spierwiastkowane przez 2, wydaje wzór następujący:

$$\sqrt{-a-bi} = \sqrt{r}.\left[\cos.\left(\frac{2n+1}{2}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)+i.\sin.\left(\frac{2n+1}{2}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)\right] \quad . \text{ D}).$$

Podstawiwszy w nim n = o, otrzymujemy wzór:

$$\sqrt{-a-bi} = \sqrt{r}.\left[\cos.\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)+i.\sin.\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right] =$$

$$= \sqrt{r}.\left(-\sin.\frac{\alpha}{2}+i.\cos.\frac{\alpha}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \; \alpha'''),$$

a podstawiwszy n = 1, uzyskamy wzór:

$$\sqrt{-a-bi} = \sqrt{r}.\left[\cos.\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)+\sin.\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right] =$$

$$= \sqrt{r}.\left\|\cos.\left[2\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]+i.\sin.\left[2\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]\right\|$$

$$= \sqrt{r}.\left[\cos.\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)-i.\sin.\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right] \quad . \quad . \quad . \; \beta'''),$$

a z nich, t. j. z α''') i β'''), ostatecznie wzór podwójny:

$$\mp\sqrt{-a-bi} = \mp\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}.$$

A teraz zestawiwszy cztery wyniki powyższego poszukiwania i każdy z nich rozdzieliwszy na dwa wzory, otrzymujemy:

$$+\sqrt{a+bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i.\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

$$+\sqrt{a-bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i.\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

$$-\sqrt{a+bi} = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i.\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

$$-\sqrt{a-bi} = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i.\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

$$+\sqrt{-a+bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} + i.\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}.$$

$$+\sqrt{-a-bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} - i.\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}.$$

$$-\sqrt{-a+bi} = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} - i.\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}.$$

$$-\sqrt{-a-bi} = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} + i.\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}},$$

z których to wzorów wyczytujemy, że:

„Suma dwóch kwadrat. pierwiastków liczb sprzężonych jest ilością rzeczywistą, zaś różnica tychże pierwiastków kwadratowych jest ilością czysto urojoną“.

Potęga liczby wielorakiej o wykładniku odjemnym.

Potęgując liczbę wieloraką:

$$\text{A)} \ldots L = r. (\cos. \alpha + i. \sin. \alpha)$$

przez całą liczbę odjemną — m, otrzymujemy co następuje:

$$[r. (\cos. \alpha + i. \sin. \alpha)]^{-m} = \frac{1}{r^m (\cos. m\alpha + i. \sin. m\alpha)}.$$

Uwolniwszy teraz drugą stronę tego równania od mianownika, mamy ostatecznie wzór:

$$\text{B)} \ldots [r. (\cos. \alpha + i. \sin. \alpha)]^{-m} =$$
$$= r^{-m} (\cos. m\alpha - i. \sin. m\alpha).$$

Spierwiastkowawszy zaś liczbę wieloraką A), przez odjemną liczbę całą — m, uzyskamy wzór:

$$\text{C)} \ldots \sqrt[-m]{r. (\cos. \alpha + i. \sin. \alpha)} = r^{-\frac{1}{m}} \left(\cos. \frac{\alpha}{m} - i. \sin. \frac{\alpha}{m}\right).$$

Prawidło wykładników w mnożeniu i dzieleniu potęg liczb wielorakich.

Jeżeli $a = r. (\cos. \alpha + i. \sin. \alpha)$

$$\text{i} \quad b^m = r^m (\cos. m\alpha + i. \sin. m\alpha)$$
$$a^n = r^n (\cos. n\alpha + i. \sin. n\alpha),$$

to $a^m a^n = r^{m+n} [\cos. (m+n) \alpha + i. \sin. (m+n) \alpha].$

Lecz druga strona tego równania jest to samo, co $a^{(m+n)}$, dlatego $a^m a^n = a^m a^n$.

Również mamy:

$$a^m : a^n = \frac{r^m (\cos. m\alpha + i. \sin. m\alpha)}{r^n (\cos. n\alpha + i. \sin. n\alpha)} =$$
$$= r^{(m-n)} [\cos. (m - n) \alpha + i. \sin. (m - n) \alpha];$$

a ta druga strona jest potęgą $a^{(m-n)}$, więc: $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Zatem w mnożeniu i dzieleniu potęg ilości wielorakich, prawidło wykładników jest takie same, jakie dla ilości rzeczywistych.

Dalej mamy, gdy $m = n$,

$$a^n : a^n = a^o = \frac{r^n}{r^n} [\cos. (n - n) \alpha + i. \sin. (n - n) \alpha] = 1.$$

A gdy $m \angle n$ iż $m + w = n$, wtedy

$$a^m = r^m (\cos. m\alpha + i. \sin. m\alpha)$$
$$\text{i} \quad a^n = a^{m+w} = r^{(m+w)} [\cos. (m + w) \alpha + i. \sin (m + w) \alpha)$$

a dzieląc stronami pierwsze przez drugie, otrzymujemy:

$$a^m : a^{m+w} = r^{-w} [\cos. (- w\alpha) + i \sin. (- w\alpha)] =$$
$$a^{-w} = r^{-w} [\cos. w\alpha - i. \sin. w\alpha] =$$
$$= \frac{1}{r^w (\cos. w\alpha + i. \sin. w\alpha)} = \frac{1}{a^w}$$

Więc podobnie, jak dla ilości rzeczywistych istnieje związek:

$$a^o = 1, \; a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Użytek wyrażeń urojonych.

Rozwiązywanie równań dwumiennych. $X^n - A = 0$.

Równanie dwumienne, $X^n - A = 0$, w którem A może być jakąkolwiek ilością rzeczywistą albo urojoną, ma „n“ różnych pierwiastków; pierwiastki te zawiera wzór następujący:

$$X^n = A = R [\cos. (\alpha + 2r\pi) + i. \sin. (\alpha + 2r\pi)] \; . \; . \; . \; A).$$

W tym wzorze ilość „r“ jest ilością rzeczywistą, całą, dodatnią albo ujemną, i może od zera pacząwszy rózne przybierać wartości, bez naruszenia wielkości „A“.

Jeżeli liczba „A" jest rzeczywistą, wtedy argument $\alpha = 0$, lub $\alpha = 2m\pi$, albo $\alpha = \pi$ lub $(2m + 1)\pi$, wedle tego czy „A" jest ilością dodatnią czy odjemną.

Wzór A), daje się przedstawić jako iloczyn dwóch czynników, jak to widzieliśmy już wyżej, przeto także wzór równoważny:

$$A') \ldots X^n = R. (\cos. \alpha + i. \sin. \alpha) (\cos. 2r\pi + i. \sin. 2r\pi) = A. (+1).$$

Dla dwumianu $X^n + A = 0$, będzie podobny:

$$A'') \ldots X^n = R. (\cos. \alpha + i. \sin. \alpha) [\cos. (2r+1)\pi + i. \sin. (2r+1)\pi] = \\ = A. (-1).$$

Pierwiastki dwumianu $X^n - A = 0$, zawarte są we wzorze:

$$B) \ldots X = \sqrt[n]{R}. \left(\cos. \frac{\alpha}{n} + i. \sin. \frac{\alpha}{n}\right) \left(\cos. \frac{2r\pi}{n} + i. \sin. \frac{2r\pi}{n}\right);$$

a pierwiastki dwumianu $X^n + A = 0$, we wzorze:

$$B') \ldots X = \sqrt[n]{R}. \left(\cos. \frac{\alpha}{n} + i. \sin. \frac{\alpha}{n}\right) \left[\cos. \frac{(2r+1)\pi}{n} + i. \sin. \frac{(2r+1)\pi}{n}\right].$$

W obydwóch tych wyrażeniach czynnik:

$$\sqrt[n]{R}. \left(\cos. \frac{\alpha}{n} + i. \sin. \frac{\alpha}{n}\right)$$

jest ilością stałą, zaś drugie czynniki są ilościami zmiennymi, bo zależą od liczby „r", która przybiera wartość:

$$r = 0, 1, 2, 3 \ldots (-1).$$

Czynnik zmienny wzoru pierwszego, zawiera wszystkie pierwiastki jednostki dodatniej, czynnik drugiego mieści w sobie wszystkie pierwiastki jednostki odjemnej, przeto możemy napisać:

$$y = \cos. \frac{2r\pi}{n} + i. \sin. \frac{2r\pi}{n} = \sqrt[n]{+1} \ldots a)$$

$$y = \cos. \frac{(2r+1)\pi}{n} + i. \sin. \frac{(2r+1)\pi}{n} = \sqrt[n]{-1} \ldots b).$$

Te dwa wyrażenia przyjmują różne wartości, gdy liczba zmienna „r" staje się $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots (n-1)$, któremi mnożyć trzeba czynnik stały $\sqrt[n]{R}. \left(\cos. \frac{\alpha}{n} + i. \sin. \frac{\alpha}{n}\right)$, aby wyznaczyć „n" różnych pierwiastków dwumianu $X^n \mp A = 0$. Więc rozwiązywanie dwumianów n-tego stopnia $X^n \mp A = 0$, schodzi do rozwiązywania dwumianów $y \mp 1 = 0$.

Własności pierwiastków dwumianów $y^n \mp 1 = 0$.

Biorąc pod rozwagę naprzód dwumian $y^n - 1 = 0$, podstawiamy po kolei $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots (n-1)$, we wzorze a), przez co otrzymamy różne pierwiastki tworzące szereg:

$$\begin{aligned}
y_0 &= \cos. 0 + i. \sin. 0 = +1. \\
y_1 &= \cos. \frac{2\pi}{n} + i. \sin. \frac{2\pi}{n}. \\
y_2 &= \cos. \frac{4\pi}{n} + i. \sin. \frac{4\pi}{n}. \\
y_3 &= \cos. \frac{6\pi}{n} + i. \sin. \frac{6\pi}{n}. \qquad c). \\
y_4 &= \cos. \frac{8\pi}{n} + i. \sin. \frac{8\pi}{n}. \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_{n-5} &= \cos. \frac{2(n-5)\pi}{n} + i. \sin. \frac{2(n-5)\pi}{n} \\
y_{n-4} &= \cos. \frac{2(n-4)\pi}{n} + i. \sin. \frac{2(n-4)\pi}{n} \\
y_{n-3} &= \cos. \frac{2(n-3)\pi}{n} + i. \sin. \frac{2(n-3)\pi}{n} \\
y_{n-2} &= \cos. \frac{2(n-2)\pi}{n} + i. \sin. \frac{2(n-2)\pi}{n} \\
y_{n-1} &= \cos. \frac{2(n-1)\pi}{n} + i. \sin. \frac{2(n-1)\pi}{n}
\end{aligned}$$

Pierwszy z tego szeregu pierwiastek jest dodatnią jednostką rzeczywistą; ażeby zaś rzeczony dwumian miał drugi pierwiastek rzeczywisty, musi się spełnić warunek $\sin. \frac{2r\pi}{n} = 0$, co pociąga za sobą $\frac{2r\alpha}{n} = \pi$, czyli $n = 2r$, a z tego wynika, że dwumian zadany $X^n - A = 0$ musi być parzystego stopnia.

Jeśli tedy wykładnik potęgowy „n" jest liczbą parzystą, dwumian posiłkowy $y^n - 1 = 0$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste: pierwszy wynika z podstawienia $r = 0$, drugi z $r = \frac{n}{2}$; zatem będzie:

$$y_0 = \cos. o + i. \sin. o = + 1.$$
$$y_{\frac{n}{2}} = \cos. \pi + i. \sin. \pi = - 1.$$

Wszystkie inne pierwiastki są urojone.

Jeżeli dwumian $X^n - A = 0$ jest stopnia nieparzystego, wtedy tylko podstawienie $r = 0$, wydaje jedyny pierwiastek rzeczywisty dwumianu posiłkowego $y^n - 1 = 0$; inne pierwiastki są urojone.

Zobaczmy teraz, jakiego rodzaju są owe pierwiastki urojone. W tym celu rozwińmy funkcye trygonometryczne wchodzące w skład wyrazów y_{n-5}; y_{n-4}; y_{n-3}; y_{n-2}; y_{n-1}; szeregu c) i sprowadźmy je do postaci najprostszej. Co uczyniwszy, pozbliżajmy do siebie co dwa pierwiastki równo oddalone od obóch skrajności szeregu c), a otrzymamy pary następujące:

$$\alpha) \quad \begin{cases} y_1 = \cos. \frac{2\pi}{n} + i. \sin. \frac{2\pi}{n}, \\ y_{n-1} = \cos. \frac{2\pi}{n} - i. \sin. \frac{2\pi}{n}. \end{cases}$$

$$\beta) \quad \begin{cases} y_2 = \cos. \frac{4\pi}{n} + i. \sin. \frac{4\pi}{n}, \\ y_{n-2} = \cos. \frac{4\pi}{n} - i. \sin. \frac{4\pi}{n}. \end{cases}$$

$$\gamma) \quad \begin{cases} y_3 = \cos. \frac{6\pi}{n} + i. \sin. \frac{6\pi}{n}, \\ y_{n-3} = \cos. \frac{6\pi}{n} - i. \sin. \frac{6\pi}{n}. \end{cases}$$

$$\delta) \quad \begin{cases} y_4 = \cos. \frac{8\pi}{n} + i. \sin. \frac{8\pi}{n}, \\ y_{n-4} = \cos. \frac{8\pi}{n} - i. \sin. \frac{8\pi}{n}. \end{cases}$$

i t. d., i t. d.

Powyższe układy dwójek okazują, że urojone pierwiastki dwumianu posiłkowego $y^n - 1 = 0$, są ilościami po dwa sprzężonemi.

A mnożąc każde dwa pierwiastki sprzężone przez siebie, otrzymujemy na iloczyn jednostkę rzeczywistą i dodatnią;

z czego się okazuje, że po dwa pierwiastki sprzężone, są zarazem ilościami wzajemnemi:

$$\cos.\frac{2\pi}{n} - i.\sin.\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{\cos.\frac{2\pi}{n} + i.\sin.\frac{2\pi}{n}}.$$

$$\cos.\frac{4\pi}{n} - i.\sin.\frac{4\pi}{n} = \frac{1}{\cos.\frac{4\pi}{n} + i.\sin.\frac{4\pi}{n}}.$$

$$\cos.\frac{6\pi}{n} - i.\sin.\frac{6\pi}{n} = \frac{1}{\cos.\frac{6\pi}{n} + i.\sin.\frac{6\pi}{n}}.$$

$$\cos.\frac{8\pi}{n} - i.\sin.\frac{8\pi}{n} = \frac{1}{\cos.\frac{8\pi}{n} + i.\sin.\frac{8\pi}{n}},$$

i t. d., i t. d.

Wróciwszy do szeregu c), który tworzą pierwiastki urojone, po sobie następujące:

$$y_1 = \cos.\frac{2\pi}{n} + i.\sin.\frac{2\pi}{n}.$$

$$y_2 = \cos.\frac{4\pi}{n} + i.\sin.\frac{4\pi}{n}.$$

$$y_3 = \cos.\frac{6\pi}{n} + i.\sin.\frac{6\pi}{n}.$$

$$y_4 = \cos.\frac{8\pi}{n} + i\ \sin.\frac{8\pi}{n}. \qquad c).$$

$$y_5 = \cos.\frac{10\pi}{n} + i.\sin.\frac{10\pi}{n}.$$

$$y_6 = \cos.\frac{12\pi}{n} + i.\sin.\frac{12\pi}{n}.$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$y_{n-7} = \cos.\frac{2(n-7)\pi}{n} + i.\sin.\frac{2(n-7)\pi}{n}$$

$$y_{n-6} = \cos.\frac{2(n-6)\pi}{n} + i.\sin.\frac{2(n-6)\pi}{n}$$

$$y_{n-5} = \cos.\frac{2(n-5)\pi}{n} + i.\sin.\frac{2(n-5)\pi}{n}$$

$$y_{n-4} = \cos. \frac{2(n-4)\pi}{n} + i. \sin. \frac{2(n-4)\pi}{n}$$

$$y_{n-3} = \cos. \frac{2(n-3)\pi}{n} + i. \sin. \frac{2(n-3)\pi}{n}$$

$$y_{n-2} = \cos. \frac{2(n-2)\pi}{n} + i. \sin. \frac{2(n-2)\pi}{n}$$

$$y_{n-1} = \cos. \frac{2(n-1)\pi}{n} + i. \sin. \frac{2(n-1)\pi}{n},$$

pomnóżmy je przez siebie, tworząc z czynników danych kombinacye dwójkowe, trójkowe, czwórkowe itd., itd., a otrzymamy następujące wyniki:

$$y_1 y_2 = \cos. \frac{6\pi}{n} + i. \sin. \frac{6\pi}{n} = y_3$$

$$y_1 y_3 = \cos. \frac{8\pi}{n} + i. \sin. \frac{8\pi}{n} = y_4$$

$$y_1 y_4 = \cos. \frac{10\pi}{n} + i. \sin. \frac{10\pi}{n} = y_5$$

$$y_1 y_5 = \cos. \frac{12\pi}{n} + i. \sin. \frac{12\pi}{n} = y_6.$$

. . . .

. . . .

$$y_1 y_{n-5} = \cos. \frac{2(n-4)\pi}{n} + i. \sin. \frac{2(n-4)\pi}{n} = y_{n-4}$$

$$y_1 y_{n-4} = \cos. \frac{2(n-3)\pi}{n} + i. \sin. \frac{2(n-3)\pi}{n} = y_{n-3}$$

$$y_1 y_{n-3} = \cos. \frac{2(n-2)\pi}{n} + i. \sin. \frac{2(n-2)\pi}{n} = y_{n-2}$$

$$y_1 y_{n-2} = \cos. \frac{2(n-1)\pi}{n} + i. \sin. \frac{2(n-1)\pi}{n} = y_{n-1}$$

$$y_1 y_{n-1} = \cos. \frac{2n\pi}{n} + i. \sin. \frac{2n\pi}{n} = y_0. = y_n.$$

$$y_2 y_3 = \cos. \frac{10\pi}{n} + i. \sin. \frac{10\pi}{n} = y_5$$

$$y_2 y_4 = \cos. \frac{12\pi}{n} + i. \sin. \frac{12\pi}{n} = y_6$$

$$y_2 y_5 = \cos.\frac{14\pi}{n} + i.\sin.\frac{14\pi}{n} = y_7$$

$$y_2 y_6 = \cos.\frac{16\pi}{n} + i.\sin.\frac{16\pi}{n} = y_8.$$

. . . .

. . . .

$$y_3 y_4 = \cos.\frac{14\pi}{n} + i.\sin.\frac{14\pi}{n} = y_7$$

$$y_3 y_5 = \cos.\frac{16\pi}{n} + i.\sin.\frac{16\pi}{n} = y_8$$

$$y_3 y_6 = \cos.\frac{18\pi}{n} + i.\sin.\frac{18\pi}{n} = y_9$$

$$y_3 y_7 = \cos.\frac{20\pi}{n} + i.\sin.\frac{20\pi}{n} = y_{10}.$$

. . . .

. . . .

i t. d., i t. d.

$$y_1 y_2 y_3 = \cos.\frac{12\pi}{n} + i.\sin.\frac{12\pi}{n} = y_6$$

$$y_1 y_2 y_4 = \cos.\frac{14\pi}{n} + i.\sin.\frac{14\pi}{n} = y_7$$

$$y_1 y_2 y_5 = \cos.\frac{16\pi}{n} + i.\sin.\frac{16\pi}{n} = y_8$$

$$y_1 y_2 y_6 = \cos.\frac{18\pi}{n} + i.\sin.\frac{18\pi}{n} = y_9.$$

. . . .

. . . .

$$y_2 y_3 y_4 = \cos.\frac{18\pi}{n} + i.\sin.\frac{18\pi}{n} = y_9$$

$$y_2 y_3 y_5 = \cos.\frac{20\pi}{n} + i.\sin.\frac{20\pi}{n} = y_{10}$$

$$y_2 y_3 y_6 = \cos.\frac{22\pi}{n} + i.\sin.\frac{22\pi}{n} = y_{11}.$$

. . . .

. . . .

i t. d., i t. d.,

tworząc iloczyny ilukolwiek pierwiastków dwumianu $y^n - 1 = 0$, otrzymujemy znowu pierwiastek tegoż dwumianu, należący do

szeregu c), a miejsce jego porządkowe wskazuje suma wskaźników, którymi opatrzone są czynniki wybrane do mnożenia.

Potęgowanie pierwiastków szereg c) stanowiących, przez liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . . , wydaje wyniki następujące:

$$y_1^1 = \cos. \frac{2\pi}{n} + i. \sin. \frac{2\pi}{n} = y_1$$

$$y_1^2 = \cos. \frac{4\pi}{n} + i. \sin. \frac{4\pi}{n} = y_2$$

$$y_1^3 = \cos. \frac{6\pi}{n} + i. \sin. \frac{6\pi}{n} = y_3$$

$$y_1^4 = \cos. \frac{8\pi}{n} + i. \sin. \frac{8\pi}{n} = y_4.$$

. . . .

. . . .

$$y_2^1 = \cos. \frac{4\pi}{n} + i. \sin. \frac{4\pi}{n} = y_2$$

$$y_2^2 = \cos. \frac{8\pi}{n} + i. \sin. \frac{8\pi}{n} = y_4$$

$$y_2^3 = \cos. \frac{12\pi}{n} + i. \sin. \frac{12\pi}{n} = y_6$$

$$y_2^4 = \cos. \frac{16\pi}{n} + i. \sin. \frac{16\pi}{n} = y_8.$$

. . . .

. . . .

$$y_3^1 = \cos. \frac{6\pi}{n} + i. \sin. \frac{6\pi}{n} = y_3$$

$$y_3^2 = \cos. \frac{12\pi}{n} + i. \sin. \frac{12\pi}{n} = y_6$$

$$y_3^3 = \cos. \frac{18\pi}{n} + i. \sin. \frac{18\pi}{n} = y_9$$

$$y_3^4 = \cos. \frac{24\pi}{n} + i. \sin. \frac{24\pi}{n} = y_{12}.$$

. . . .

. . . .

$$y_4^1 = \cos. \frac{8\pi}{n} + i. \sin. \frac{8\pi}{n} = y_4$$

$$y_4^2 = \cos. \frac{16\pi}{n} + i. \sin. \frac{16\pi}{n} = y_8$$

$$y_4^3 = \cos. \frac{24\pi}{n} + i. \sin. \frac{24\pi}{n} = y_{12}$$

$$y_4^4 = \cos. \frac{32\pi}{n} + i. \sin. \frac{32\pi}{n} = y_{16}.$$

. . . .

. . . .

i t. d., i t. d.

Widzimy tedy, że potęga pierwiastka jakiegokolwiek ze szeregu c), jest znowu pierwiastkiem dwumianu $y^n - 1 = 0$, należącym do tego samego szeregu c), a miejsce, które on w szeregu rzeczonym zajmuje, wskazuje iloczyn wykładnika potęgowego i wskazówki potęgowanego pierwiastka.

Również z dzielenia któregokolwiek pierwiastka dwumianu $y^n - 1 = 0$, przez którykolwiek inny, wynika na iloraz pierwiastek tegoż dwumianu, należący do szeregu c), a miejsce jego wskazuje różnica pomiędzy wskaźniklem dzielnej i wskaźnikiem dzielnika.

Np.: $$y_5 : y_2 = \cos. \frac{6\pi}{n} + i. \sin. \frac{6\pi}{n} = y_3 = y_{5-2}$$

$$y_6 : y_3 = \cos. \frac{6\pi}{n} + i. \sin. \frac{6\pi}{n} = y_3 = y_{6-3}$$

$$y_7 : y_3 = \cos. \frac{8\pi}{n} + i. \sin. \frac{8\pi}{n} = y_4 = y_{7-3}.$$

i t. d., i t. d.

Przejdźmy teraz do dwumianu $y^n + 1 = 0$. Jego pierwiastki są zawarte we wzorze:

$$b) \dots y = \cos. \frac{(2r+1)\pi}{n} + i. \sin. \frac{(2r+1)\pi}{n}.$$

Jeżeli ten dwumian ma pierwiastek rzeczywisty, wtedy $\sin. \frac{(2r+1)\pi}{n} = 0$, więc spełnić się musi warunek $\frac{(2r+1)\pi}{n} = \pi$, czyli $n = 2r + 1$. Jeśli tedy wykładnik n, jest liczbą nieparzystą, dwumian $y^n + 1 = 0$, ma jedyny pierwiastek rzeczywisty, wynikający ze wzoru b), z podstawienia $r = \frac{n-1}{2}$; jeśli wykładnik n. jest liczbą parzystą, wtedy wszystkie dwumianu posiłkowego pierwiastki są urojone.

Podstawiając we wzorze b) kolejno $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots (n-1)$, otrzymujemy pierwiastki urojone, tworzące szereg następujący:

$$
\left.\begin{aligned}
y_0 &= \cos.\frac{\pi}{n} + i.\sin.\frac{\pi}{n}\\
y_1 &= \cos.\frac{3\pi}{n} + i.\sin.\frac{3\pi}{n}\\
y_2 &= \cos.\frac{5\pi}{n} + i.\sin.\frac{5\pi}{n}\\
y_3 &= \cos.\frac{7\pi}{n} + i.\sin.\frac{7\pi}{n}\\
y_4 &= \cos.\frac{9\pi}{n} + i.\sin.\frac{9\pi}{n}.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_{n-5} &= \cos.\frac{(2n-9)\pi}{n} + i.\sin.\frac{(2n-9)\pi}{n}\\
y_{n-4} &= \cos.\frac{(2n-7)\pi}{n} + i.\sin.\frac{(2n-7)\pi}{n}\\
y_{n-3} &= \cos.\frac{(2n-5)\pi}{n} + i.\sin.\frac{(2n-5)\pi}{n}\\
y_{n-2} &= \cos.\frac{(2n-3)\pi}{n} + i.\sin.\frac{(2n-3)\pi}{n}\\
y_{n-1} &= \cos.\frac{(2n-1)\pi}{n} + i.\sin.\frac{(2n-1)\pi}{n}.
\end{aligned}\right\} \text{d)}.
$$

Rozwinąwszy funkcye trygonometryczne, wchodzące w skład pierwiastków stanowiących wyrazy bliższe końca powyższego szeregu, przekonamy się, że pierwiastki po dwa są ilościami wzajemnemi i sprzężonemi, a mianowicie te, które są równo oddalone od początku i od końca szeregu d);

$$
\alpha)\quad \begin{aligned}
y_0 &= \cos.\frac{\pi}{n} + i.\sin.\frac{\pi}{n}\\
y_{n-1} &= \cos.\frac{\pi}{n} - i.\sin.\frac{\pi}{n};
\end{aligned}
$$

$$
\beta)\quad \begin{aligned}
y_1 &= \cos.\frac{3\pi}{n} + i.\sin.\frac{3\pi}{n}\\
y_{n-2} &= \cos.\frac{3\pi}{n} - i.\sin.\frac{3\pi}{n};
\end{aligned}
$$

γ)
$$y_2 = \cos. \frac{5\pi}{n} + i. \sin. \frac{5\pi}{n}$$
$$y_{n-3} = \cos. \frac{5\pi}{n} - i. \sin. \frac{5\pi}{n},$$

δ)
$$y_3 = \cos. \frac{7\pi}{n} + i. \sin. \frac{7\pi}{n}$$
$$y_{n-4} = \cos. \frac{7\pi}{n} - i. \sin. \frac{7\pi}{n},$$

ε)
$$y_4 = \cos. \frac{9\pi}{n} + i. \sin. \frac{9\pi}{n}$$
$$y_{n-5} = \cos. \frac{9\pi}{n} - i. \sin. \frac{9\pi}{n}.$$

i t. d., i t. d.

Tworząc iloczyny nieparzystej ilości pierwiastków urojonych dwumianu $y^n + 1 = 0$, otrzymujemy wyniki następujące:

$$y_0\, y_1\, y_2 = \cos. \frac{9\pi}{n} + i. \sin. \frac{9\pi}{n} = y_4$$
$$y_0\, y_1\, y_3 = \cos. \frac{11\pi}{n} + i. \sin. \frac{11\pi}{n} = y_5$$
$$y_0\, y_1\, y_4 = \cos. \frac{13\pi}{n} + i. \sin. \frac{13\pi}{n} = y_6$$
$$y_0\, y_1\, y_5 = \cos. \frac{15\pi}{n} + i. \sin. \frac{15\pi}{n} = y_7$$
$$y_0\, y_1\, y_6 = \cos. \frac{17\pi}{n} + i. \sin. \frac{17\pi}{n} = y_8.$$

. . . .

. . . .

i t. d., i t. d.

$$y_0\, y_2\, y_3 = \cos. \frac{13\pi}{n} + i. \sin. \frac{13\pi}{n} = y_6$$
$$y_0\, y_2\, y_4 = \cos. \frac{15\pi}{n} + i. \sin. \frac{15\pi}{n} = y_7$$
$$y_0\, y_2\, y_5 = \cos. \frac{17\pi}{n} + i. \sin. \frac{17\pi}{n} = y_8$$
$$y_0\, y_2\, y_6 = \cos. \frac{19\pi}{n} + i. \sin. \frac{19\pi}{n} = y_9$$

$$y_0 y_2 y_7 = \cos. \frac{21\pi}{n} + i. \sin. \frac{21\pi}{n} = y_{10}.$$

. . . .

. . . .

i t. d., i t. d.

$$y_1 y_2 y_3 = \cos. \frac{15\pi}{n} + i. \sin. \frac{15\pi}{n} = y_7$$

$$y_1 y_2 y_4 = \cos. \frac{17\pi}{n} + i. \sin. \frac{17\pi}{n} = y_8$$

$$y_1 y_2 y_5 = \cos. \frac{19\pi}{n} + i. \sin. \frac{19\pi}{n} = y_9.$$

. . . .

. . . .

i t. d., i t. d.

$$y_0 y_1 y_2 y_3 y_4 = \cos. \frac{25\pi}{n} + i. \sin. \frac{25\pi}{n} = y_{12}$$

$$y_0 y_1 y_2 y_3 y_5 = \cos. \frac{27\pi}{n} + i. \sin. \frac{27\pi}{n} = y_{13}$$

$$y_0 y_1 y_2 y_3 y_6 = \cos. \frac{29\pi}{n} + i. \sin. \frac{29\pi}{n} = y_{14}.$$

. . . .

. . . .

i t. d., i t. d., i t. d.

$$y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 = \cos. \frac{35\pi}{n} + i. \sin. \frac{35\pi}{n} = y_{17}$$

$$y_1 y_2 y_3 y_4 y_6 = \cos. \frac{37\pi}{n} + i. \sin. \frac{37\pi}{n} = y_{18}$$

$$y_1 y_2 y_3 y_4 y_7 = \cos. \frac{39\pi}{n} + i. \sin. \frac{39\pi}{n} = y_{19}.$$

. . . .

. . . .

i t. d., i t. d., i t. d.

Wszystkie te wyniki dowodzą, że iloczyny ilukolwiek pierwiastków w ilości nieparzystej są pierwiastkami dwumianu $y^n + 1 = 0$, należącemi do szeregu d).

Zobaczmy teraz, czem są iloczyny pierwiastków dwumianu tego w ilości parzystej.

$$y_0 y_1 = \cos. \frac{4\pi}{n} + i. \sin. \frac{4\pi}{n} = y_2$$

$$y_0\, y_2 = \cos. \frac{6\pi}{n} + i. \sin. \frac{6\pi}{n} = y_{\substack{3\\c}}$$

$$y_0\, y_3 = \cos. \frac{8\pi}{n} + i. \sin. \frac{8\pi}{n} = y_{\substack{4\\c}}$$

$$y_0\, y_4 = \cos. \frac{10\pi}{n} + i. \sin. \frac{10\pi}{n} = y_{\substack{5\\c}}.$$

. . . .

. . . .

$$y_1\, y_2 = \cos. \frac{8\pi}{n} + i. \sin. \frac{8\pi}{n} = y_{\substack{4\\c}}$$

$$y_1\, y_3 = \cos. \frac{10\pi}{n} + i. \sin. \frac{10\pi}{n} = y_{\substack{5\\c}}$$

$$y_1\, y_4 = \cos. \frac{12\pi}{n} + i. \sin. \frac{12\pi}{n} = y_{\substack{6\\c}}.$$

. . . .

. . . .

$$y_2\, y_3 = \cos. \frac{12\pi}{n.} + i. \sin. \frac{12\pi}{n} = y_{\substack{6\\c}}$$

$$y_2\, y_4 = \cos. \frac{14\pi}{n} + i. \sin. \frac{14\pi}{n} = y_{\substack{7\\c}}$$

$$y_2\, y_5 = \cos. \frac{16\pi}{n} + i. \sin. \frac{16\pi}{n} = y_{\substack{8\\c}}.$$

. . . .

. . . .

$$y_3\, y_4 = \cos. \frac{16\pi}{n} + i. \sin. \frac{16\pi}{n} = y_{\substack{8\\c}}$$

$$y_3\, y_5 = \cos. \frac{18\pi}{n} + i. \sin. \frac{18\pi}{n} = y_{\substack{9\\c}}$$

$$y_3\, y_6 = \cos. \frac{20\pi}{n} + i. \sin. \frac{20\pi}{n} = y_{\substack{10\\c}}.$$

. . . .

. . . .

$$y_0\, y_1\, y_2\, y_3 = \cos. \frac{16\pi}{n} + i. \sin. \frac{16\pi}{n} = y_{\substack{8\\c}}$$

$$y_0\, y_1\, y_2\, y_4 = \cos. \frac{18\pi}{n} + i. \sin. \frac{18\pi}{n} = y_{\substack{9\\c}}$$

$$y_0\, y_1\, y_2\, y_5 = \cos. \frac{20\pi}{n} + i. \sin. \frac{29\pi}{n} = y_{\substack{10\\c}}.$$

. . . .

. . . .

Są to pierwiastki dwumianu $y^n - 1 = 0$.

$$y_1 y_2 y_3 y_4 = \cos. \frac{24\pi}{n} + i. \sin. \frac{24\pi}{n} = y_{\underset{c}{12}}$$

$$y_1 y_2 y_3 y_5 = \cos. \frac{26\pi}{n} + i. \sin. \frac{26\pi}{n} = y_{\underset{c}{13}}$$

$$y_1 y_2 y_3 y_6 = \cos. \frac{28\pi}{n} + i. \sin. \frac{28\pi}{n} = y_{\underset{c}{14}}.$$

. . . .

. . . .

$$y_0 y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 = \cos. \frac{36\pi}{n} + i. \sin. \frac{36\pi}{n} = y_{\underset{c}{18}}$$

$$y_0 y_1 y_2 y_3 y_4 y_6 = \cos. \frac{38\pi}{n} + i. \sin. \frac{38\pi}{n} = y_{\underset{c}{19}}$$

$$y_0 y_1 y_2 y_3 y_4 y_7 = \cos. \frac{40\pi}{n} + i. \sin. \frac{40\pi}{n} = y_{\underset{c}{20}}.$$

. . . .

. . . .

$$y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6 = \cos. \frac{48\pi}{n} + i. \sin. \frac{48\pi}{n} = y_{\underset{c}{24}}$$

$$y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_7 = \cos. \frac{50\pi}{n} + i. \sin. \frac{50\pi}{n} = y_{\underset{c}{25}}$$

$$y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_8 = \cos. \frac{52\pi}{n} + i. \sin. \frac{52\pi}{n} = y_{\underset{c}{26}}.$$

. . . .

. . . .

Stąd widzimy, że iloczyn parzystej iości pierwiastków dwumianu $y^n - 1 = 0$, jest pierwiastkiem dwumianu $y^n - 1 = 0$.

Potęgowanie wyrazów szeregu d), wydaje następujące wyniki:

$$y_0^1 = \cos. \frac{\pi}{n} + i. \sin. \frac{\pi}{n}$$

$$y_0^2 = \cos. \frac{2\pi}{n} + i. \sin. \frac{2\pi}{n}$$

$$y_0^3 = \cos. \frac{3\pi}{n} + i. \sin. \frac{3\pi}{n}$$

$$y_0^4 = \cos. \frac{4\pi}{n} + i. \sin. \frac{4\pi}{n}.$$

. . . .

. . . .

$$y_1^1 = \cos. \frac{3\pi}{n} + i. \sin. \frac{3\pi}{n}$$

$$y_1^2 = \cos. \frac{6\pi}{n} + i. \sin. \frac{6\pi}{n}$$

$$y_1^3 = \cos. \frac{9\pi}{n} + i. \sin. \frac{9\pi}{n}$$

$$y_1^4 = \cos. \frac{12\pi}{n} + i. \sin. \frac{12\pi}{n}.$$

. . . .

. . . .

$$y_2^1 = \cos. \frac{5\pi}{n} + i. \sin. \frac{5\pi}{n}$$

$$y_2^2 = \cos. \frac{10\pi}{n} + i. \sin. \frac{10\pi}{n}$$

$$y_2^3 = \cos. \frac{15\pi}{n} + i. \sin. \frac{15\pi}{n}$$

$$y_2^4 = \cos. \frac{20\pi}{n} + i. \sin. \frac{20\pi}{n}.$$

. . . .

. . . .

$$y_3^1 = \cos. \frac{7\pi}{n} + i. \sin. \frac{7\pi}{n}$$

$$y_3^2 = \cos. \frac{14\pi}{n} + i. \sin. \frac{14\pi}{n}$$

$$y_3^3 = \cos. \frac{21\pi}{n} + i. \sin. \frac{21\pi}{n}$$

$$y_3^4 = \cos. \frac{28\pi}{n} + i. \sin. \frac{28\pi}{n}.$$

. . . .

. . . .

i t. d., i t. d.

Wyniki te jasno okazują, że potęgi nieparzystego stopnia pierwiastków dwumianu $y^n + 1 = 0$, są także jego pierwiastkami, zaś potęgi parzystego stopnia są pierwiastkami dwumianu $y^n - 1 = 0$.

Dzieląc przez którykolwiek wyraz szeregu d) wszystkie inne po nim, z kolei następujące, otrzymujemy zawsze szereg c), np.:

$$y_1 : y_0 = \cos. \frac{2\pi}{n} + i. \sin. \frac{2\pi}{n}$$

$$y_2 : y_0 = \cos. \frac{4\pi}{n} + i. \sin. \frac{4\pi}{n}$$

$$y_3 : y_0 = \cos. \frac{6\pi}{n} + i. \sin. \frac{6\pi}{n}$$

$$y_4 : y_0 = \cos. \frac{8\pi}{n} + i. \sin. \frac{8\pi}{n}$$

$$y_5 : y_0 = \cos. \frac{10\pi}{n} + i. \sin. \frac{10\pi}{n}$$

$$y_6 : y_0 = \cos. \frac{12\pi}{n} + i. \sin. \frac{12\pi}{n}.$$

. . . .

. . . .

$$y_2 : y_1 = \cos. \frac{2\pi}{n} + i. \sin. \frac{2\pi}{n}$$

$$y_3 : y_1 = \cos. \frac{4\pi}{n} + i. \sin. \frac{4\pi}{n}$$

$$y_4 : y_1 = \cos. \frac{6\pi}{n} + i. \sin. \frac{6\pi}{n}$$

$$y_5 : y_1 = \cos. \frac{8\pi}{n} + i. \sin. \frac{8\pi}{n}$$

$$y_6 : y_1 = \cos. \frac{10\pi}{n} + i. \sin. \frac{10\pi}{n}.$$

. . . .

. . . .

$$y_3 : y_2 = \cos. \frac{2\pi}{n} + i. \sin. \frac{2\pi}{n}$$

$$y_4 : y_2 = \cos. \frac{4\pi}{n} + i. \sin. \frac{4\pi}{n}$$

$$y_5 : y_2 = \cos. \frac{6\pi}{n} + i. \sin. \frac{6\pi}{n}$$

$$y_6 : y_2 = \cos. \frac{8\pi}{n} + i. \sin. \frac{8\pi}{n}$$

$$y_7 : y_2 = \cos. \frac{10\pi}{n} + i. \sin. \frac{10\pi}{n}.$$

. . . .

. . . .

Wzór Moivre'a.

Wyrzuciwszy całkowitego stopnia potęgę r^m ze wzoru:

$$r^m (\cos. \alpha + i. \sin. \alpha)^m = r^m (\cos. m\alpha + i. \sin. m\alpha),$$

otrzymujemy z niego wzór następujący:

$$(\cos. \alpha + i. \sin. \alpha)^m = \cos. m\alpha + i. \sin. m\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; I.$$

zwany wzorem Moivre'a.

Wyraziwszy w nim po pierwszej stronie znaku równości dostawę i wstawę argumentu „α" głoskami „a" i „b", i tak pozornie zmieniony dwumian spotęgowawszy przez liczbę całą „m", utworzymy równość:

$$a^m + \frac{m!\, i}{(m-1)!\, 1!} a^{m-1} b + \frac{m!\, i^2}{(m-2)!\, 2!} a^{m-2} b^2 +$$
$$+ \frac{m!\, i^3}{(m-3)!\, 3!} a^{m-3} b^3 + \frac{m!\, i^4}{(m-4)!\, 4!} a^{m-4} b^4 +$$
$$+ \ldots + \frac{m!\, i^{m-4}}{4!\, (m-4)!} a^4 b^{m-4} + \frac{m!\, i^{m-3}}{3!\, (m-3)!} a^3 b^{m-3} +$$
$$+ \frac{m!\, i^{m-2}}{2!\, (m-2)!} a^2 b^{m-2} + \frac{m!\, i^{m-1}}{1!\, (m-1)!} ab^{m-1} +$$
$$+ \frac{m!\, i^m}{m!} b^m = \cos. m\alpha + i. \sin. m\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; II$$

Podstawiwszy w niej wartości potęg jednostki urojonej, sprowadziwszy następnie tę równość do zera i połączywszy ze sobą osobno wyrazy rzeczywiste, a osobno wyrazy urojone, otrzymujemy wyrażenie następujące:

$$\Big[\cos. m\alpha - a^m + \frac{m!}{(m-2)!\, 2!} a^{m-2} b^2 - \frac{m!}{(m-4)!\, 4!} a^{m-4} b^4 +$$
$$+ \frac{m!}{(m-6)!\, 6!} a^{m-6} b^6 - \frac{m!}{(m-8)!\, 8!} a^{m-8} b^8 + \ldots \Big] +$$
$$+ i. \Big[\sin. m\alpha - \frac{m!}{(m-1)!\, 1!} a^{m-1} b + \frac{m!}{(m-3)!\, 3!} a^{m-3} b^3 -$$
$$- \frac{m!}{(m-5)!\, 5!} a^{m-5} b^5 + \frac{m!}{(m-7)!\, 7!} a^{m-7} b^7 - \ldots \Big] = 0.$$

Tutaj suma dwóch wielomianów schodzi do zera; przeto każdy z nich osobno musi być zeru równy: dlatego z tej sumy wyłaniają się dwa wzory następujące:

$$\text{A). } \cos. m\alpha = a^m - \frac{m!}{(m-2)!\,2!} a^{m-2} b^2 + \frac{m!}{(m-4)!\,4!} a^{m-4} b^4 -$$
$$- \frac{m!}{(m-6)!\,6!} a^{m-6} b^6 + \frac{m!}{(m-8)!\,8!} a^{m-8} b^8 - \ldots$$

$$\text{B). } \sin. m\alpha = \frac{m!}{(m-1)!\,1!} a^{m-1} b - \frac{m!}{(m-3)!\,3!} a^{m-3} b^3 +$$
$$+ \frac{m!}{(m-5)!\,5!} a^{m-5} b^5 - \frac{m!}{(m-7)!\,7!} a^{m-7} b^7 +$$
$$+ \frac{m!}{(m-9)!\,9!} a^{m-9} b^9 - \frac{m!}{(m-11)!\,11!} a^{m-11} b^{11} + \ldots$$

Wzory te składają się z ograniczonej ilości wyrazów i mogą służyć do wyrażenia dostawy i wstawy wielokrotności całkowitej łuku przez iloczyny potęg dostawy i wstawy tegoż łuku.

Np.: $\cos. 2\alpha = \cos.^2 \alpha - \sin.^2 \alpha.$

$\cos. 3\alpha = \cos.^3 \alpha - 3 \cos. \alpha \sin.^2 \alpha.$

$\cos. 4\alpha = \cos.^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \sin.^2 a + \sin.^4 \alpha.$

$\cos. 5\alpha = \cos.^5 \alpha - 10 \cos.^3 \sin.^2 \alpha + 5 \cos. \alpha \sin.^4 \alpha.$

. . . .

. . . .

$\sin. 2\alpha = 2 \cos. \alpha \sin. \alpha.$

$\sin. 3\alpha = 3 \cos.^2 \alpha \sin. \alpha - \sin^3 \alpha.$

$\sin. 4\alpha = 4 \cos. \alpha \sin. \alpha - 4 \cos. \alpha \sin.^3 \alpha.$

$\sin. 5\alpha = 5 \cos.^4 \alpha \sin. \alpha - 10 \cos.^2 \alpha \sin.^3 \alpha + \sin.^5 \alpha.$

. . . .

. . . .

Weźmy teraz na uwagę dwie sprzężone ilości wielorakie, których moduły są jednostkami rzeczywistemi, a mianowicie:

$$\cos. \alpha + i. \sin. \alpha = u \; . \; . \; . \; . \; . \; a).$$
$$\cos. \alpha - i. \sin. \alpha = v \; . \; . \; . \; . \; . \; b).$$

Z tych równań otrzymujemy:

$$2 \cos. \alpha = u + v; \quad 2i. \sin. \alpha = u - v,$$

a potęgując przez „m“ te wyrażenia, mamy:

$$2^m \cos.^m \alpha = u^m + \frac{m!}{(m-1)!\,1!} u^{m-1} v + \frac{m!}{(m-2)!\,2!} u^{m-2} v^2 +$$
$$\text{a). } \quad + \frac{m!}{(m-3)!\,3!} u^{m-3} v^3 + \ldots + \frac{m!}{3!\,(m-3)!} u^3 v^{m-3} +$$
$$+ \frac{m!}{2!\,(m-2)!} u^2 v^{m-2} + \frac{m!}{1!\,(m-1)!} u v^{m-1} + \frac{m!}{m!} v^m.$$

$$a^m i^m \sin.^m \alpha = u^m - \frac{m!}{(m-1)!\,1!} u^{m-1} v + \frac{m!}{(m-2)!\,2!} u^{m-2} v^2 -$$

$$\text{b).} \quad - \frac{m!}{(m-3)!\,3!} u^{m-3} v^3 + \ldots \mp \frac{m!}{3!\,(m-3)!} u^3 v^{m-3} \pm$$

$$\pm \frac{m!}{2!\,(m-2)!} u^2 v^{m-2} \mp \frac{m!}{1!\,(m-1)!} u v^{m-1} \pm \frac{m!}{m!} v^m.$$

Jeżeli $m = 2n$, jest liczbą parzystą, wtedy drugie strony tych to wzorów a) i b), zawierają nieparzyste ilości wyrazów. W obu wzorach środkowym wyrazem bezwzględnym jest:

$$\frac{m!}{n!\,n!} u^n v^n = \binom{m}{n} u^n v^n;$$

ten wyraz w rozwinięciu a) jest dodatnim, a w rozwinięciu b) albo dodatnim, albo odjemnym.

Łącząc wyrazy równoodległe od skrajnych, mamy z a) równość:

$$\text{c)} \ldots \quad 2^m \cos.^m \alpha = u^m + v^m + \frac{m!\,u\,v}{(m-1!\,1!} (u^{m-2} + v^{m-2}) +$$

$$+ \frac{m!\,u^2 v^2}{(m-2)!\,2!} (u^{m-4} + v^{m-4}) + \frac{m!\,u^3 v^3}{(m-3)!\,3!} (u^{m-6} + v^{m-6}) +$$

$$+ \frac{m!\,u^4 v^4}{(m-4)!\,4!} (u^{m-8} + v^{m-8}) + \ldots \ldots + \frac{m!\,u^{\frac{m}{2}} v^{\frac{m}{2}}}{\frac{m}{2}!\,\frac{m}{2}!}.$$

a z b):

$$\text{d)} \ldots \quad 2^m i.^m \sin.^m \alpha = u^m + v^m - \frac{m!\,u\,v}{(m-1!\,1!} (u^{m-2} + v^{m-2}) +$$

$$+ \frac{m!\,u^2 v^2}{(m-2)!\,2!} (u^{m-4} + v^{m-4}) - \frac{m!\,u^3 v^3}{(m-3)!\,3!} (u^{m-6} + v^{m-6}) +$$

$$+ \frac{m!\,u^4 v^4}{(m-4)!\,4!} (u^{m-8} + v^{m-8}) - \ldots \ldots \pm \frac{m!\,n^{\frac{m}{2}} v^{\frac{m}{2}}}{\frac{m}{2}!\,\frac{m}{2}!}.$$

Zważywszy, że $u^k + v^k = 2 \cos. k\alpha$ i $u^k v^k = 1$, przeto z tych równości otrzymujemy znowu dwie następujące:

$$2^m \cos.^m \alpha = 2 \cos. m\alpha + \frac{2\,m!}{(m-1)!\,1!} \cos. (m-2)\,\alpha +$$

$$\alpha). + \frac{2\,m!}{(m-2)!\,2!} \cos. (m-4)\,\alpha + \frac{2\,m!}{(m-3)!\,3!} \cos. (m-6)\,\alpha +$$

$$+ \frac{2\,m!}{(m-4)!\,4!} \cos. (m-8)\,\alpha + \ldots \frac{m!}{\frac{m}{2}!\,\frac{m}{2}!}$$

albo:

$$\text{C)} \ldots 2^{m-1} \cos^m \alpha = \cos. m\alpha + \frac{m!}{(m-1)!\,1!} \cos.(m-2)\,\alpha +$$

$$+ \frac{m!}{(m-2)!\,2!} \cos.(m-4)\,\alpha + \frac{m!}{(m-3)!\,3!} \cos.(m-6)\,\alpha +$$

$$+ \frac{m!}{(m-4)!\,4!} \cos.(m-4)\,\alpha + \ldots + \tfrac{1}{2} \frac{m!}{\frac{m}{2}!\,\frac{m}{2}!}$$

$$2^m\, i.^m \sin.^m \alpha = 2 \cos. m\alpha - \frac{2\,m!}{(m-1)!\,1!} \cos.(m-2)\,\alpha +$$

$$\beta). + \frac{2\,m!}{(m-2)!\,2!} \cos.(m-4)\,\alpha - \frac{2\,m!}{(m-3)!\,3!} \cos.(m-6)\,\alpha +$$

$$+ \frac{2\,m!}{(m-4)!\,4!} \cos.(m-8)\,\alpha - \ldots \pm \frac{m!}{\frac{m}{2}!\,\frac{m}{2}!}$$

albo bacząc że $i^m = i^{2n} = \pm 1 = (-1)^{\frac{m}{2}}$:

$$\text{D)}. (-1)^{\frac{m}{2}}\, 2^{m-1} \sin^m \alpha = \cos. m\alpha - \frac{m!}{(m-1)!\,1!} \cos.(m-2)\,\alpha +$$

$$+ \frac{m!}{(m-2)!\,2!} \cos.(m-4)\,\alpha + \frac{m!}{(m-3)!\,3!} \cos.(m-6)\,\alpha +$$

$$+ \frac{m!}{(m-4)!\,4!} \cos.(m-8)\,\alpha - \ldots \pm \tfrac{1}{2} \frac{m!}{\frac{m}{2}!\,\frac{m}{2}!}$$

Jeżeli wykładnik „m“ jest liczbą nieparzystą, wtedy ilość wyrazów rozwinięcia a) i b), jest parzysta $2n = m + 1$. Pierwszy wyraz środkowy ma skazówkę $n = \frac{m+1}{2}$.

Wyrazy środkowe rozwinięcia „a“, są następujące:

$$\frac{m!}{[m-(n-1)]!\,(n-1)!}\, u^{m-(n-1)}\, v^{n-1},$$

$$\frac{m!}{(n-1)!\,[m-(n-1)]!}\, u^{n-1}\, v^{m-(n-1)}.$$

zaś rozwinięcia b):

$$\pm \frac{m!}{(m-(n-1)]!\,(m-1)!}\, u^{m-(n-1)}\, v^{n-1},$$

$$\pm \frac{m!}{(n-1)!\,[m-(n-1)]!}\, u^{n-1}\, v^{m-(n-1)}.$$

Zbierając wyrazy mające równe współczynniki, otrzymujemy z c):

$$c') \;.\;.\; 2^m \cos.^m \alpha = u^m\, v^m + \frac{m!\; uv}{(m-1)!\; 1!}\,(u^{m-2} + v^{m-2}) +$$

$$+ \frac{m!\; u^2\, v^2}{(m-2)!\; 2!}\,(u^{m-4} + v^{m-4}) + \frac{m!\; u^3\, v^3}{(m-3)!\; 3!}\,(u^{m-6} + v^{m-6}) +$$

$$+ \;.\;.\;.\; + \frac{m!\; u^{n-1}\, v^{n-1}}{[m-(n-1)]!\; (n-1)!}\,(u^{m-2(n-1)} + v^{m-2(n-1)}).$$

zaś z d):

$$d') \;.\;.\; 2^m\, i.^m \sin.^m \alpha = (u^m - v^m) - \frac{m!\; uv}{(m-1)!\; 1!}\,(u^{m-2} - v^{m-2}) +$$

$$+ \frac{m!\; u^2\, v^2}{(m-2)!\; 2!}\,(u^{m-4} - v^{m-4}) - \frac{m!\; u^3\, v^3}{(m-3)!\; 3!}\,(u^{m-6} - v^{m-6}) +$$

$$.\;.\;.\; \pm \frac{m!\; u^{n-1}\, v^{n-1}}{[m-(n-1)]!\; (n-1)!}\,(u^{m-2(n-1)} - v^{m-2(n-1)}).$$

Za sumy potęg, za ich różnice i za iloczyny podstawiwszy wartości, utworzymy z c′) i d′) dwa nowe wzory, a mianowicie z c′):

$$E) \;.\; 2^{m-1} \cos.^m \alpha = \cos.\, m\alpha + \frac{m!}{(m-1)!\; 1!} \cos.\, (m-2)\, \alpha +$$

$$+ \frac{m!}{(m-2)!\; 2!} \cos.\, (m-4)\, \alpha + \;.\;.\;.$$

$$+ \frac{m!}{[m-(n-1)]!\; (n-1)!} \cos.\, \alpha$$

a z d′):

$$F) \; (-1)^{\frac{m-1}{2}}\, 2^{m-1} \sin.^m \alpha = \sin.\, m\alpha - \frac{m!}{(m-1)!\; 1!} \sin.\, (m-2)\, \alpha +$$

$$+ \frac{m!}{(m-2)!\; 2!} \sin.\, (m-4)\, \alpha - \;.\;.\;.\;.\;.$$

$$\pm \frac{m!}{[m-(n-1)]!\; (n-1)!} \sin.\, \alpha.$$

Jan Korczyński.

CZĘŚĆ URZĘDOWA.

I.

SKŁAD GRONA NAUCZYCIELSKIEGO

przy końcu roku szkolnego 1895.

a) **Dla nauki obowiązkowej.**

1. Skuba Tadeusz, dyrektor, uczył języka greckiego w kl. VII *b* — 4 godziny tygodniowo.

2. Krókowski Leon, profesor VIII r., uczył języka polskiego w kl. V, VII *a*+*b*, logiki w kl. VII *a*+*b* i psychologii w kl. VIII — 15 godzin tygodniowo.

3. Stodolak Stanisław, Dr fil., prof. VIII r., gospodarz klasy III *a*, uczył języka łacińskiego w kl. III *a*+*b* i IV — 18 godzin tygodniowo.

4. Korczyński Jan, prof. VIII r., gospodarz klasy VIII, uczył matematyki w kl. II *a*, III *a*+*b*, IV, V, VIII i fizyki w kl. IV — 21 godzin tygodniowo.

5. Tułasiewicz Józef, prof. VIII r., uczył historyi w kl. III *b*, VI i VIII — 10 godzin tygodniowo.

6. Alexandrowicz Włodzimierz, prof. VIII r., zawiadowca zbioru historyczno-geograficznego, gospodarz kl. VII *a*, uczył geografii w kl. I *a*+*b*, historyi w kl. III *a*, V, VII *a*+*b* — 18 godzin tygodniowo.

7. Taborski Józef, prof., zawiadowca biblioteki nauczycielskiej, uczył języka łacińskiego w kl. VIII, greckiego w kl. V i VIII — 15 godzin tygodniowo.

8. Kulczyński Władysław, prof., członek korespondent Akademii Umiejętności w Krakowie, zawiadowca gabinetu historyi naturalnej, uczył historyi naturalnej w kl. I *a*+*b*, II *a*+*b*, III *a*+*b*, V, VI, matematyki w kl. II *b* — 19 godzin tygodniowo.

9. Szajdzicki Euzebiusz, prof., zawiadówca czytelni niemieckiej dla uczniów, gospodarz klasy VII *b*, uczył języka niemieckiego w kl. VI, VII *a*+*b* i VIII — 16 godzin tygodniowo.

10. Siedlecki Wojciech, ks. prof., exhortator dla uczniów klas wyższych, uczył religii w kl. II *a*+*b*, III *a*+*b*, IV, V, VII *a*+*b*, VIII — 18 godzin tygodniowo.

11. Cetnarowski Piotr, prof., gospodarz klasy II *b*, uczył języka łacińskiego w kl. II *b*, greckiego w kl. VI i VII *a* — 17 godzin tygodniowo.

12. Kawecki Medard Antoni, prof., zawiadowca gabinetu fizykalnego, uczył matematyki w kl. VI, VII *a*+*b*, fizyki w kl. VII *a*+*b* i VIII — 18 godzin tygodniowo.

13. Krasnosielski Teofil, prof., uczył języka łacińskiego w kl. V, VII *a*+*b* — 16 godzin tygodniowo.

14. Mazanowski Mikołaj, prof., zawiadowca czytelni polskiej dla uczniów, gospodarz klasy VI, uczył języka łacińskiego w kl. VI, polskiego w kl. III *b*, IV, VI i VIII — 18 godzin tygodniowo.

15. Gołba Franciszek, ks., Dr Teol., egzaminowany zastępca nauczyciela, exhortator dla uczniów klas niższych, uczył religii w kl. I *a*+*b* i VI — 6 godzin tygodniowo.

16. Wyrobek Józef, zastępca nauczyciela, gospodarz klasy III *b*, uczył języka niemieckiego w kl. I *b*, III *a*+*b*, historyi w kl. IV — 18 godzin tygodniowo.

17. Ptaszyk Michał, zastępca nauczyciela, gospodarz klasy IV, uczył języka greckiego w kl. III *a*+*b*, IV, polskiego w kl. III *a* — 17 godzin tygodniowo.

18. Hamczykiewicz Roman, zastępca nauczyciela, gospodarz klasy V, uczył języka niemieckiego w kl. II *a*+*b*, IV i V — 18 godzin tygodniowo.

19. Meyer Ignacy, zastępca nauczyciela, uczył matematyki w kl. I *a*+*b* — 6 godzin tygodniowo.

20. Sobiński Stanisław, zastępca nauczyciela, gospodarz klasy I *a*, uczył języka łacińskiego w kl. I *a*, historyi w klasie II *a*+*b* — 16 godzin tygodniowo.

21. Feliński Gerard, zastępca nauczyciela, gospodarz klasy I *b*, uczył języka łacińskiego w kl. I *b*, polskiego w kl. I *a*+*b*, II *b* — 17 godzin tygodniowo.

22. Krukowski Władysław, zastępca nauczyciela, gospodarz klasy II *a*, uczył języka łacińskiego w kl. II *a*, polskiego w kl. II *a* i niemieckiego w kl. I *a* — 17 godzin tygodniowo.

b) Dla nauki nadobowiązkowej.

1. Tułasiewicz Józef, j. w., uczył historyi kraju rodzinnego w kl. III *b*, po jednej godzinie tygodniowo.

2. Alexandrowicz Włodzimierz, j. w., uczył historyi kraju rodzinnego w kl. III *a* po jednej i w kl. VII *a*+*b*, po dwie godziny tygodniowo.

3. Wyrobek Józef, j. w., uczył historyi kraju rodzinnego w kl. IV po jednej godzinie tygodniowo.

4. Ptaszyk Michał, j. w., uczył kaligrafii w dwóch oddziałach, w każdym po jednej godzinie tygodniowo.

5. Trnka Teodor, nauczyciel szkoły wydziałowej w Krakowie, uczył rysunków w trzech oddziałach, w każdym po dwie godziny tygodniowo.

6. Dec Walenty, nauczyciel prywatny, uczył śpiewu w dwóch oddziałach, w każdym po dwie godziny tygodniowo.

7. Rongier Paweł, nauczyciel prywatny, uczył języka francuskiego w trzech oddziałach, w każdym po dwie godziny tygodniowo.

8. W Towarzystwie „Sokół krakowski" pobierała młodzież gimnazyalna naukę gimnastyki w dwóch oddziałach, w każdym po dwie godziny tygodniowo.

9. Landau Samuel, Dr, kaznodzieja synagogi izraelickiej, uczył w zakładzie tutejszym religii mojżeszowej w trzech oddziałach t. j. w IV, V i IX, w każdym po jednej godzinie tygodniowo; reszta młodzieży wyznania mojżeszowego, przydzielona do oddziałów I, II, III, VI, VII, VIII, X i XI pobierała naukę religii w tej samej liczbie godzin tygodniowych w trzech innych szkołach średnich krakowskich.

II.

PLAN NAUK

w roku szkolnym 1895.

KLASA I.

L.	Przedmiot nauki	Godzin tygodn.	Treść nauki	Autor książki szkolnej
1	Religia	2	Nauka wiary i obyczajów.	Katechizm ks. Debarba
2	J. łaciński	8	Nauka o formach prawidłowych. Co tydzień wypracowanie szkolne.	Zwięzła Gram. Samolewicza. Przykł. Steiner i Scheindler
3	J. polski	3	Elementarna nauka odmiany imienia i słowa; nauka o zdaniu pojedyńczem i złożonem. Czytanie, opowiadanie i wyuczanie się na pamięć ustępów. Co tydzień ćwiczenie ortograficzne.	Gram. Małeckiego wyd. VIII. Wypisy tom I Próchnicki i Wójcik
4	J. niemiecki	6	Elementarna nauka odmiany imion i czasowników i o zdaniu pojedyńczem, pisownia przy danej sposobności. Co tydzień wypracowanie szkolne.	L. German i K. Petelenz, Ćwiczenia niemieckie
5	Geografia	3	Wstępne pojęcia, opis powierzchni ziemi według jej naturalnych własności, wiadomości najważn. z politycznej geografii, czyt. i rys. map.	Benoni i Tatomir Geografia V.
6	Matematyka	3	Arytmetyka: Cztery działania liczbami całkowitemi, podzielność liczb; w 2 półroczu ułamki i z geometryi do przystawania trójkątów. Co miesiąc zadanie szkolne, ćwiczenia domowe na każdą lekcyę.	Arytmetyka Brzostowicza Geometrya Močnika (Maryniaka) I.
7	Historya naturalna	2 27	6 miesięcy: zoologia (ssawce, owady); 4 miesiące: botanika (dwuliścienne prócz baldaszkowych, motylkowych, złożonych, kotkowych, liliowate i palmy).	Zoologia obrazowa Nowickiego wyd. VI. Botanika Rostafińskiego.

KLASA II.

L.	Przedmiot nauki	Godzin tygodn.	Treść nauki	Autor książki szkolnej
1	Religia	2	Dzieje starego zakonu.	Dąbrowski T. Historya biblijna.
2	J. łaciński	8	Formy nieprawidłowe z powtórzeniem prawidłowych. Części mowy nieodmienne.	Gram. Samolewicza, 1887. Ćwicz. Steiner i Scheindler II.
3	J. polski	3	Gramatyka i czytanie jak w klasie 1szej. Wypracowania piśmienne 3 na miesiąc.	Gram. jak w kl. I. Wypisy tom II. Próchnicki i Wójcik
4	J. niemiecki	5	Powtórzenie i uzupełnienie nauki o formach w połączeniu z główniejszemi prawidłami składni i rządu, tłómaczenie, pisownia. Czytanie, opowiadanie i wyuczanie się na pamięć łatwych ustępów z wypisów. Wypracowania piśm. jak w kl. I.	L. German i K. Petelenz, Ćwiczenia niemieckie, II.
5	Geografia	4	1. Geogr. fizyczna i polityczna Azyi i Afryki. Oro i hydrografia Europy, szczegółowy opis południowej i zachodniej Europy. 2. Dzieje starożytne, sposobem biograficznym.	Geogr. Wiślickiego (Baranowskiego i Dziedzickiego wyd. V). Semkowicz.
6	Matematyka	3	Arytmetyka i geometrya na przemian; stosunki i proporcye, pojedyncza reguła trzech; przystawanie trójkątów, koło; czworobok i wielobok. Zadania jak w kl. I.	Arytmetyka Zajączkowskiego Geometrya Močnika (Maryniaka).
7	Historya naturalna	2	6. mies.: zoologia (ptaki, gady, płazy, ryby, bezkręgowe prócz owadów). 4 miesiące: botanika (pozostałe rodziny).	Zoologia jak w kl. I. Botanika Rostafińskiego.
		27		

KLASA III.

L.	Przedmiot nauki	Godzin tygodn.	Treść nauki	Autor książki szkolnej
1	Religia	2	Dzieje nowego zakonu	Dąbrowski T. Szuster (Rodecki) Historya biblijna.
2	J. łaciński	6	Składnia zgody i przypadków: Czytanie z Korneliusza Neposa: żywoty Miltyadesa, Temistoklesa, Arystydesa, Lisandra, Pelopidasa, Hannibala i Katona. Co dni 14 praca domowa, co miesiąc zadanie szkolne.	Gram. Samolewicz-Sołtysik. Kornelius Nepos (Patočki) Cwiczenia Próchnickiego w. III.
3	J. grecki	5	Odmiana prawidłowa imion i czasowników. W II. półr. co dni 14 zadanie domowe a co miesiąc szkolne.	Gram. Curtius-Ćwikliński. Ćwiczenia Lewickiego i Parylaka.
4	J. polski	3	Systematyczna nauka deklinacyi i składnia rządu; czyt. jak w kl. I. Co dni 14 praca piśmienna.	Wypisy Czubek i Zawiliński.
5	J. niemiecki	4	Systematyczna nauka deklinacyi i konjugacyi. Czytanie jak w klasie II. Co dni 15 praca piśmienna.	Gram. Petelenza. German i Petelenz Ćwiczenia niemiec.
6	Geografia i historya	3	Szczegółowy opis Europy północnej, wschodniej i środkowej z wyjątkiem Austryi, Ameryka i Australia Dzieje wieków średnich.	Opowiadania Semkowicza.
6	Matematyka	3	Rozkład godzin jak w kl. II. cztery działania algebraiczne, potęgi, pierwiastki, skrócone mnożenie i dzielenie, przemiany, powierzchnia i podobieństwo figur, nauka o kole.	Aryt. Zajączkowskiego II; geometrya Močnik-Maryniak.
8	Nauki przyrodnicze	2 28	W I. półroczu fizyka: własności ogólne, nauka o cieple, chemia nieorganiczna (z wyjątkiem metali). W II półr. mineralogia.	Łomnicki M. Mineralogia. Fizyka Kawecki i Tomaszewski.

KLASA IV.

L.	Przedmiot nauki	Godzin. tygodn.	Treść nauki	Autor książki szkolnej
1	Religia	2	Wykłady obrzędów i zwyczajów religijnych.	Liturgia ks. Jachimowskiego
2	J. łaciński	6	Nauka o czasach i trybach; oratio obliqua. supinum; gerundium. Caesar de bello gallico 80 rozdziałów.	Gram. Samolewicza; Cezar w. Prammera; Ćw. Próchnickiego.
3	J. grecki	4	Odmiana czasowników na „ω" począwszy od perf. act.; odmiana czasowników na „μι", odmiana niewzorowa czasownika.	Gram. Ćwikliński. Ćwiczenia Lewicki-Parylak.
4	J. polski	3	Systematyczna nauka konjugacyi i o zdaniach złożonych i okresach; wierszowanie. Czytanie i wyprac. piśmienne jak w kl. III.	Wypisy t. IV. 1874. Czubek i Zawiliński.
5	J. niemiecki	4	Ukończenie i powtórzenie gramatyki. Czytanie jak w klasie II. Wypracowania piśm. jak w kl. III.	Gram. Petelenza. Ćwiczenia niemieckie Germana i Petelenza.
6	Geografia i historya	4	I. półr. Nowsze dzieje z uwzględnieniem związku ich z dziejami Austryi. Powtórzenie geografii Europy. II. półr. Szczegółowa geografia monarchii austro-węgierskiej.	I. Sawczyński t. 3. Geografia austro-węg. monar. Benoni-Majerski.
7	Matematyka	3	Równania pierwszego stopnia, rachunek spółki, mieszaniny, reguła trzech składana, reguła łańcuchowa, procenta składane; stereometrya.	Arytm. Zajączkowskiego, II, geometr. Močnik-Maryniak.
8	Fizyka	3	Mechanika, akustyka, magnetyzm, elektryczność, optyka.	Solcski.
		29	Wszystkie prace piśmienne jak w klasie III.	

KLASA V.

L.	Przedmiot nauki	Godzin tygodn.	Treść nauki	Autor książki szkolnej
1	Religia	2	Apologetyka i dogmatyka ogólna.	Martin. (Jachimowski).
2	J. łaciński	6	Liwiusz I, XXI. Owidyusz 1400—1500 wierszy. Prozodya i metryka. Powtórzenie gramatyki o przypadkach. Co miesiąc zadanie szkolne.	Liwiusz Zingerlego i Owidyusz wyd. Skupniewicza. Gramatyka Samolewicza.
3	J. grecki	5	Nauka o przypadkach. Lektura Ksenofonta i Homera Iliady ks. I i II. 4 zadania szkolne na półrocze.	Gram. Curtius-Ćwikliński, Chrestomatya Fiderera. Ilias Sołtysika.
4	J. polski	3	Głosownia, etymologia; o tropach i figurach, o rodzajach stylu i gatunkach prozy i poezyi. Sprawozdanie z lektury prywatnej. Co trzy tygodnie wypracowanie pism.	Wypisy polskie Próchnickiego.
5	J. niemiecki	4	Czytanie w połączeniu z objaśnieniem gramatycznem i stylistycznem, memorowanie celniejszych ustępów. Sprawozdanie z lektury prywatnej. Co dni 20 wypracowanie piśmienne.	Petelenz u. Werner Deutsches Lesebuch dla kl. V.
6	Geografia i historya	3	Dzieje starożytne w połączeniu z geografią.	Zakrzewski, Historya powszechna.
7	Matematyka	4	Algebra: Wstęp, 4 działania, ułamki, stosunki i proporcye. Geometrya: longimetrya i planimetrya. Co miesiąc wypracowanie szkolne, częste ćwiczenia domowe.	Algebra Dziwińskiego Geometrya Močnika w tłómaczeniu Staneckiego, wyd. III.
	Historya. naturalna	2 29	W I półroczu mineralogia. W II półroczu botanika.	Łomnicki. Rostafiński.

KLASA VI.

L.	Przedmiot nauki	Godzin tygodn.	Treść nauki	Autor książki szkolnej
1	Religia	2	Dogmatyka szczegółowa.	Jak w kl. V.
2	J. łaciński	6	Sallusti bellum Jugurthinum. Cic. in Cat. I., Virgili z Eneidy ks. I. Ecl. I. Georg. I. Obeznanie się z formą listów. Powtarzanie gramatyki o czasach i trybach. Zadania jak w kl. V.	Wyd. Sołtysika; wyd. Eichlera. Gram. Samolewicza.
3	J. grecki	5	Nauka o czasach i trybach Hom. Ilias III, IV, V, VI. Z Herodota VIII. Zadania jak w klasie V.	Ilias, Sołtysik; Herodot, Lauczicky.
4	J. polski	3	Lektura szkolna i prywatna Dzieje literatury od początku do Stanisława Augusta. Zadania jak w klasie V.	Wypisy polskie. St. Tarnowski i Wójcika.
5	J. niemiecki	4	Jak w klasie V.	Petelenz u. Werner Deutsches Lesebuch dla kl. VI.
6	Historya	4	Dokończenie historyi rzymskiej (od Augusta). Dzieje średnich wieków.	Zakrzewski Hist. powsz. t. II.
7	Matematyka	3	Z algebry: potęgi, pierwiastki, logarytmy; równania II stopnia o jednej i kilku niewiadomych; z geometryi: stereometrya i trygonometrya.	Algebra Baranieckiego; Geom. jak w kl. V.
8	Historya naturalna	8	Zoologia.	Petelenz.
			Wszystkie ćwiczenia piśmienne jak w kl. V.	

KLASA VII.

L.	Przedmiot nauki	Godzin tygodn.	Treść nauki	Autor książki szkolnej
1	Religia	2	Etyka.	Martin (Solecki).
2	J. łaciński	5	Powtarzanie gramatyki. Vergil. Aeneid. II, VI, X. Cicero in Cath. IV, pro Archia, Tuscul. I. Zadania jak w kl. V.	Gram. jak w kl. VI. wydanie szkolne. Eichler, Sołtysik.
3	J. grecki	4	Demostenes Olinth. I, II, filip. II, Uzupełnienie gramatyki. Hom. Odys. I, VI, VII, VIII, IX. Zadania jak w kl. V.	Gram. jak w kl. V. wydanie szkolne. Pauly et Wotke.
4	J. polski	3	Lektura szkolna i prywatna. Historya literatury, ciąg dalszy do Mickiewicza. Co miesiąc wypracowanie piśmienne.	Jak w kl. VI.
5	J. niemiecki	4	Lektura szkolna i domowa. Co miesiąc wypracowanie piśm.	Petelenz u. Werner, Deutsches Lesebuch dla kl. VII.
6	Historya i geografia	3	Dzieje nowożytne.	Gindely t. III. wyd. Markiewicza.
7	Matematyka	3	Z algebry: Równania logarytmiczne, szeregi, rachunek procentu złożonego, ułamki ciągłe, równania nieoznaczone, kombinacye, potęgi dwumianu. Z geometryi: Geometrya analityczna w płaszczyźnie.	Jak w kl. V.
8	Fizyka	3	Własności ciał, ciepło, chemia. Mechanika ciał stałych i ciekłych.	Kawecki i Tomaszewski, Fizyka.
9	Propedeutyka filozofii	2 29	Logika.	Kozłowski.

KLASA VIII.

L.	Przedmiot nauki	Godzin tygodn.	Treść nauki	Autor książki szkolnej
1	Religia	2	Historya kościelna.	Robitsch (Jachimowski).
2	J. łaciński	5	Horacego 20 ód, 2 sat., 2 epod., 1 list. Taciti. Annal. I, II. Pogląd na literaturę rzymską. Zadania jak w kl. V.	Sas.
3	J. grecki	5	Plato: Apologia, Crito, Laches, Sophocles, Antigone. Pogląd na literaturę grecką. Zadania jak w kl. V.	Wyd. Krala, Wyd. Majchrowicza
4	J. polski	3	Czytanie dalszego ciągu arcydzieł literatury narodowej wieku XIX. Historya literatury w. XIX. Zadania jak w kl. VII.	Stan. Tarnowski i Fr. Próchnicki, część II.
5	J. niemiecki	4	Podobnie jak w kl. VII. Pogląd na literaturę niemiecką. Ustne wykłady. Co miesiąc wypracowanie.	Petelenz u. Werner VIII.
6	Historya i geografia	3	Dzieje i statystyka monarchii austro-węgierskiej w zestawieniu z innemi państwami.	Hannak-Leniek.
7	Matematyka	2	Zwięzłe powtórzenie całego przedmiotu. Częste ćwiczenia.	—
8	Fizyka	3	Mechanika ciał lotnych, uzupełn. i dokończ., elektryczność, magnetyzm, ruch drgający i falowy, akustyka i optyka.	Kawecki i Tomaszewski, Fizyka.
	Propedeutyka filozofii	2 29	Psychologia.	Zarys psychologii Crügera, p. Z. Sawczyńskiego.

Zmiany na rok szkolny 1895/6.

Wykaz książek szkolnych, zatwierdzonych przez Wys. c. k. Radę Szk. krajową dla gimnazyum św. Jacka w Krakowie na rok szkolny 1895/6.

Dla klasy I.: Katechizm większy dla szkół ludowych podług ks. Deharda opracował ks. M. Morawski. Lwów, 1891. — Samolewicz, Zwięzła gramatyka języka łacińskiego. Wydanie 1 2 i 3. Lwów, 1893. — Steiner i Scheindler, Ćwiczenia łacińskie dla I klasy. Lwów 1893. — Małecki, Gramatyka języka polskiego szkolna. Wyd. 8. Lwów, 1891. — Próchnicki i Wójcik, Wypisy polskie dla I klasy, Wydanie 1 i 2. Lwów, 1892. — L. German i K. Petelenz, Ćwiczenia niemieckie dla I klasy. Wydanie 1—3. Lwów, 1791. — Benoni i Tatomir, Krótki rys geografii. Wydanie 5. — Brzostowicz, Początki arytmetyki i algebry. Wydane 2. 1894. — Močnik-Maryniak, Geometrya poglądowa. Część I. Wyd. 6. Lwów, 1889. — Nowicki-Limbach, Zoologia. Wydanie 7. — Rostafiński, Botanika szkolna na klasy niższe. Wydanie nowe. Kraków, 1892.

Dla klasy II.: Ks. Dąbrowski, Historya biblijna zakonu starego. Wydanie 1, 2 i 3. — Samolewicz, Zwięzła gramatyka języka łacińskiego. Wydanie 1, 2 i 3. Lwów, 1893. — Steiner i Scheindler, Ćwiczenia łacińskie dla II klasy. — Małecki, Gramatyka języka polskiego szkolna. Wydanie 8. Lwów, 1891. — Próchnicki i Wójcik, Wypisy polskie dla II klasy. Lwów, 1893. — L. German i K. Petelenz, Ćwiczenia niemieckie dla klasy II. Wyd. 1 i 2. Lwów, 1891. — Baranowski i Dziedzicki, Geografia powszechna. Wyd. 6. Lwów, 1892. — Semkowicz, Opowiadania z dziejów po-

wszechnych. Część I. Lwów, 1793. — Brzostowicz. Początki arytmetyki i algebry. Wydanie 2. Lwów 1894. — Močnik-Maryniak, Geometrya poglądowa. Część I. Wyd. 6. Lwów, 1889. — Nowicki, Zoologia. Wydanie 6. Kraków, 1890. — Rostafiński, Botanika szkolna na klasy niższe. Wydanie nowe. Kraków, 1892.

Dla klasy III.: Ks. Dąbrowski, Historya biblijna zakonu nowego. Wydanie 1 i 2. Stanisławów, 1889. — Samolewicz-Sołtysik. Gramatyka języka łacińskiego. Część II. Wyd. 5 i 6. Lwów, 1893. — Próchnicki, Ćwiczenia łacińskie dla klasy III. Wyd. 2 i 3. Lwów, 1893. — Patočka-Zawiliński, Cornelius Nepos. Wyd. 5. — Ćwikliński, Gramatyka języka greckiego. Lwów, 1892. — Schenkl-Parylak, Ćwiczenia greckie. Wyd. 2. Wiedeń, 1893. — Małecki, Gramatyka języka polskiego. Wydanie 8. Lwów, 1891. — Czubek-Zawiliński, Wypisy polskie dla III klasy. Lwów, 1893. — L. German i K. Petelenz, Ćwiczenia niemieckie dla klasy III. Wyd. 1 i 2. Lwów, 1892. — Petelenz, Deutsche Grammatik. Krakau, 1890. — Baranowski i Dziedzicki, Geografia powszechna. Wyd. 6, Lwów, 1892. — Semkowicz, Opowiadania z dziejów powszechnych. Część II. Lwów, 1894. — Rawer, Dzieje ojczyste. — Zajączkowski, Początki arytmetyki i algebry. Część II. Wydanie 2. Lwów, 1891. — Močnik-Maryniak, Geometrya poglądowa. Część II. Wydanie 3 i 4. Lwów, 1891. — Kawecki i Tomaszewski, Fizyka dla niższych klas szkół średnich. — Łomnicki, Mineralogia dla niższych klas. Wyd. 3. Lwów, 1893.

Dla klasy IV.: Liturgika. — Samolewicz-Sołtysik, Gramatyka języka łacińskiego. Część II. Wyd. 5 i 6. Lwów, 1893. — Próchnicki, Ćwiczenia łacińskie dla klasy IV. Lwów, 1888. — Caesar, Commentarii de bello gallico, wyd. Prammer-Bednarski. — Ovidius, wydanie Ziws-Skupniewicz. — Ćwikliński, Gramatyka języka greckiego. Lwów, 1892. — Schenkl-Parylak, Ćwiczenia greckie. Wyd. 2. Wiedeń, 1892. — Małecki, Gramatyka języka polskiego. Wydanie 8. Lwów, 1891. — Czubek-Zawiliński, Wypisy polskie dla IV klasy. Lwów, 1894. — L. German i K. Petelenz. Ćwiczenia niemieckie dla kl. IV. Lwów, 1891. — Petelenz, Deutsche

Grammatik. Kraków, 1890. — Semkowicz, Opowiadania z dziejów powszechnych. Część III. — Benoni-Majerski, Geografia austr.-węg. monarchii. Wyd. 2. Lwów, 1892. — Rawer, Dzieje ojczyste. — Zajączkowski, Początki arytmetyki i algebry. Część II. Wydanie 2. Lwów, 1891. — Močnik-Maryniak, Geometrya poglądowa. Część II. Wyd. 3 i 4. Lwów, 1891. — Kawecki i Tomaszewski, Fizyka dla klas niższych. Kraków, 1894.

Dla klasy V.: Ks. Jachimowski, Dogmatyka ogólna. Wyd. 1 i 2. Lwów, 1889. — Livius, wydanie Zingerle-Majchrowicz. — Ovidius, wydanie Ziws-Skupniewicz. — Samolewicz-Sołtysik, Gramatyka języka łacińskiego. Część II. Wyd. 5. Lwów, 1891. — Fiderer, Chrestomatya z pism Xenofonta. Wyd. 1 i 2. Lwów, 1894. — Homera Iliada część I. Wydanie Scheindler-Sołtysik. — Ćwikliński, Gramatyka języka greckiego. Lwów, 1892. — Schenkl-Parylak, Ćwiczenia greckie. Wyd. 2. Wiedeń, 1892. — Próchnicki, Wzory poezyi i prozy. Lwów, 1893. — Petelenz und Werner, Deutsches Lesebuch für die fünfte Classe. Lemberg, 1892. — Zakrzewski, Historya powszechna. Część I. Kraków, 1891. — Dziwiński, Zasady algebry. Lwów, 1891. — Močnik-Stanecki, Geometrya dla wyższych klas. Wydanie 3. Lwów, 1889. — Łomnicki, Mineralogia i Geologia. Wyd. 3. Lwów, 1891. — Rostafiński, Botanika szkolna dla klas wyższych. Kraków, 1886.

Dla klasy VI.: Ks. Jachimowski, Dogmatyka szczegółowa. Wyd. 1 i 2. Lwów, 1889. — Sallustius, bellum Jugurthinum. Linker-Sołtysik. — Vergilius, Eichler. — Cicero, Kornitzer-Sołtysik. — Samolewicz-Sołtysik, Gramatyka języka łacińskiego, Część II. Wydanie 5. Lwów, 1891. — Fiderer, Chrestomatya z pism Xenofonta. Lwów, 1888. — Homera Iliada, część I i II. Wyd. Scheindler-Sołtysik. — Herodot, wyd. Lautschicky. — Ćwikliński, Gramatyka języka greckiego. Lwów, 1890. — Schenkl-Lewicki-Parylak. Ćwiczenia greckie. Praga, 1881. — Wypisy polskie Stan. Tarnowskiego i J. Wójcika. Część I. Wydanie 1 i 2. Lwów, 1894. — Petelenz und Werner, Deutsches Lesebuch für die sechste Classe. Lemberg, 1892. — Zakrzewski, Historya powszechna. Część I. Kraków, 1891. — Zakrzewski, Historya powszechna. Część

II. Kraków, 1894. — Dziwiński, Zasady algebry. Lwów, 1891. — Močnik-Stanecki, Geometrya dla wyższych klas. Wydanie 3. Lwów, 1889. — Logarytmy Adama. — Petelenz, Zoologia dla klas wyższych szkół średnich. Lwów, 1892.

Dla klasy VII.: Martin-Solecki, Etyka katolicka. Wydanie 1 i 2. Przemyśl, 1885. — Cicero, Kornitzer-Sołtysik. — Vergilius, Eichler. — Samolewicz-Sołtysik, Gramatyka języka łacińskiego. Część II. Wyd. 5. Lwów, 1891. — Homera Odyssea, Christ-Jezienicki. — Demostenes, Wotke-Schmid. — Curtius-Hartel-Ćwikliński, Gramatyka języka greckiego. Praga, 1890. — Wypisy polskie Stan. Tarnowskiego i J. Wójcika. Część I. Wyd. 1 i 2. Lwów, 1894. — Wypisy polskie Stan. Tarnowskiego i Fr. Próchnickiego. Część II. Lwów, 1891. — Petelenz und Werner. Deutsches Lesebuch für die siebente Classe. Lemberg, 1893. — Następujące dzieła w wydaniu Graesera, aprobowane przez c. k. Radę Szkolną krajową: Minna von Barnhelm, Iphigenie auf Tauris. — Gindely-Markiewicz, Dzieje nowożytne. Wyd. 2. Rzeszów, 1886. — Lewicki, Zarys dziejów Polski i krajów ruskich z nią połączonych. Kraków, 1893. — Baraniecki, Algebra. Kraków, 1892. — Močnik-Stanecki, Geometrya dla wyższych klas. Wydanie 3. Lwów, 1889. — Logarytmy Adama. — Kawecki i Tomaszewski, Fizyka dla wyższych klas szkół średnich. Kraków, 1892. — Tomaszewski, Chemia. — Kozłowski, Logika elementarna. Lwów, 1891.

Dla klasy VIII.: Historya kościelna. — Horatius, Sas; Tacitus Müller. — Samolewicz, Gramatyka języka łacińskiego. Wyd. 4. Lwów, 1885. — Plato, Kral; Sofokles, Schubert-Majchrowicz; Homera Odyssea, Pauly et Wotke. — Curtius-Hartel-Ćwikliński, Gramatyka języka greckiego. Praga, 1890. — Wypisy polskie Stan. Tarnowskiego i Fr. Próchnickiego. Część II. Lwów, 1891. — Petelenz und Werner, Deutsches Lesebuch für die achte Classe. Lemberg, 1894. — Następujące dzieła w wydaniu Graesera, aprobowane przez c. k. Radę Szkolną krajową: Egmont, Wallensteins Tod. — Hannak-Leniek, Historya i Statystyka austr.-węgier. monarchii. Tarnopol, 1892. — Lewicki, Zarys dziejów Polski i krajów ruskich z nią połączonych. Kraków, 1893. — Dziwiński,

Zasady algebry. Lwów, 1891. — Močnik-Stanecki, Geometrya dla wyższych klas. Wyd. 3. Lwów, 1889. — Logarytmy Adama. — Kawecki i Tomaszewski, Fizyka dla wyższych klas szkół średnich. Kraków, 1892. — Lindner-Kulczyński, Wykład psychologii. Kraków, 1895.

Lektura łacińska.

W kl. V.: Liv. I., XXII.; z pism Owidyusza wybór.
W kl. VI.: Sallustii Jugurtha; Cic. in Cat. I.; Virg. (wybór), Aen. I, Ecl. I.
W kl. VII.: Virg. II., VI., XII.; Cic. de imperio C. Pomp.; Cato maior.
W kl. VIII.: Horat. (wybór); Tac. Annal. I., II.

Lektura grecka.

W kl. V.: Xenof. Chrest. wybór z Anab.; Hom. Il. I., II.
W kl. VI.: Hom. Il. III., V., VII., XXII.; Herodot VII.
W kl. VII.: Demost. olyn. I., Philipp. II., III.; Hom. Odys. I., V., VI., XI., XIII.
W kl. VIII.: Plato: Apologia, Crito, Eutyphron; Sophocles: Oedip. rex.

III.

Temataty zadań piśmiennych.

a) W języku polskim.

W klasie V.

1. Opisać miejscowość, w której uczeń ferye przepędził.
2. Kościółek wiejski (opis podług lektury).
3. Opisać jesień i pracę rolnika w tej porze.
4. Pobudki do wczesnego wstawania.
5. Streścić rozmowę Rymwida z Litaworem w „Grażynie“ A. Mickiewicza.
6. I zima ma swe przyjemności.
7. Wpływ Nilu na stosunki społeczne i cywilizacyjne Egiptu.
8. Zgon i pogrzeb Grażyny.
9. Jak opisał Brodziński w „Wiesławie“ swaty.
10. Korzyści z wynalazku kolei żelaznych.
11. Opisać wiosnę i pracę rolnika w tej porze.
12. Przebieg myśli w elegii: Zgon Z. Krasińskiego.
13. Jakie mamy korzyści z botaniki w życiu codziennem.
14. Porównać ustawę Solona z ustawą Likurga.

Leon Krokowski.

W klasie VI.

1. Znaczenie wojen Punickich w dziejach rzymskich (dom).
2. Zalety „swobodnego i pomiernego żywota“ (według M. Reya. Szkolne).

3. Charakter Jugurty (szkolne).
4. Wykazać skutki zbytku. (Na podstawie czytanych satyr. Domowe).
5. Pobudki, skłaniające Hektora do udania się na pole walki wbrew prośbom Andromachy. (Na podstawie VI ks. Iliady. Domowe).
6. Treść i znaczenie chórów w „Odprawie posłów greckich" Jana Kochanowskiego (domowe).
7. Rady Chirona. Treść ustępu z „Satyra" J. Kochanowskiego (szkolne).
8. Układ dzieła Sallustiusza: „Bellum Jugurthinum" (dom.).
9. Zalety czytanych w szkole sielanek Szymonowicza (szkol.).
10. Opis ofiary i uczty w czasach homeryckich. (Na podstawie lektury greckiej. Domowe.)
11. Wyjaśnić genezę i znaczenie „Lamentu" Sz. Starowolskiego (szkolne).
12. Przyjaźn między Skrzetuskim, Wołodyjowskim, Podbipiętą i Zagłobą w powieści H. Sienkiewicza p. t. „Ogniem i mieczem" (domowe).
13. Treść i układ I-ej księgi Eneidy Wergilego (szkolne).
14. Pochwała życia wiejskiego w lecie (szkolne).

Mikołaj Mazanowski.

W klasie VII*a*.

1. Potrzeba jest matką przemysłu.
2. Jaki wpływ wywarły wrażenia młodości na rozwój talentu Brodzińskiego.
3. Dlaczego nazywamy miasta dźwigniami oświaty.
4. Jakie mamy korzyści z nauki języków żyjących.
5. Jakie zasługi położył Kazimierz Wielki około swojego kraju.
6. Książka dobry i zły towarzysz.
7. Podać tok myśli zawartych w I-szej pieśni „Maryi" Malczewskiego.
8. Każdy sprawcą swego losu.
9. Charakterystyka Gustawa i Albina w „Ślubach panieńskich" Fredry.
10. Jakie były skutki wojny północnej.

Leon Krókowski.

W klasie VII *b*.

1. Próżniactwo trucizną ciała i duszy.
2. Znaczenie sielanki Brodzińskiego „Wiesław“ w literaturze polskiej.
3. Jaką wartość mają lata młodociane dla człowieka.
4. Majątek jest środkiem do urzeczywistnienia wielu chwalebnych zamiarów.
5. Stanowisko Gustawa Adolfa w wojnie 30-letniej.
6. Burze obrazem cierpień w życiu.
7. Podać tok myśli zawartych w II-giej pieśni „Maryi“ Malczewskiego.
8. Jakie znaczenie mają wystawy płodów, przemysłu i sztuki.
9. Charakterystyka Anieli i Klary w „Ślubach panieńskich“ Fredry.
10. Odkrycia nowych światów w wieku XV i XVI i skutki tychże na rozwój handlowy i polityczny państw Europy.

Leon Krókowski.

W klasie VIII,

1. Porównawcza charakterystyka Lechitów i Wenedów w „Lilli Wenedzie“ Słowackiego (domowe).
2. Znaczenie trybunatu w dziejach rzymskich (domowe).
3. Alexander Severus w „Irydionie“ Z. Krasińskiego, charakter tej postaci i jej znaczenie w akcyi (szkolne).
4. Charakterystyka Sokratesa. (Na podstawie „Apologii“. Dom.)
5. Rozwinąć przysłowie: „Szkoda, przygoda — do mądrości droga“ (domowe).
6. Brutus i Kassiusz. (Na podstawie tragedyi Szekspira p. t. „Juliusz Cezar“. Szkolne).
7. Antygona a Ismena (szkolne).
8. „Praca uszlachetnia“ (szkolne).

Mikołaj Mazanowski.

b) W języku niemieckim.

W klasie V.

1. Der Sommer auf dem Lande (dom.).
2. Eine Hasenjagd zu Wasser (nach der Schullectüre; szk.).

3. Der Nutzen des Wassers (dom.).
4. Die Kraniche des Ibykos (szk.).
5. Der Winter in der Stadt (dom.).
6. Die Frucht des Gebetes (nach der Schullectüre; szk.).
7. Der doppelte Schwur der Besserung (nach der Schullectüre: dom.).
8. Publius Ovidius Naso (nach der Schullectüre; dom.).
9. Das altrömische Wohnhaus (nach der Schullectüre; szk.).
10. Die Freuden des Frühlings (dom.).
11. Der alte Diener (nach der Schullectüre; szk.).
12. Horatier und Curiatier (nach der Schullectüre; szk.).
13. Die Ausgrabungen in Pompei (nach der Schullectüre; dom.).
14. Die Zerstörung Carthagos (nach der Schullectüre; szk.).

Roman Hamczykiewicz.

W klasie VI.

1. Die Gastfreundschaft der alten Griechen (auf Grund der Schullectüre).
2. Gottes Walten im menschlichen Leben (auf Grund des Gedichtes „Graf von Habsburg"; Schulaufgabe).
3. Dornröschen (eine Erzählung auf Grund der Schullectüre).
4. Inhalt des V Gesangs in Hebbels Gedicht „Mutter und Kind" (Schulaufgabe).
5. Der Monat Dezember.
6. Wie wurde Gottfried von Bouillon zum Feldherrn gewählt? (Auf Grund der Lectüre „Das befreite Jerusalem" von Torq. Tasso. Schulaufgabe).
7. Die Hölle (Schilderung auf Grund des III Gesangs „der göttlichen Komödie" von Dante).
8. Die Selbstaufopferung (auf Grund des Lesestückes „Der Schiffbruch").
9. Schilderung der Schlacht am Vesuv (auf Grund der Schullectüre. Schulaufgabe).
10. Vorzüge des Stadtlebens vor dem Landleben.
11. Der Monat April.
12. Inhalt der Erzählung „Der Wunschring" (auf Grund der Schullectüre. Schulaufgabe).

13. Das schönste Denkmal (auf Grund des Lesestückes „Der todte Soldat“).
14. Inhalt der Romanze „Der Taucher“.

E. Szajdzicki.

W klasie VII*a*.

1. Eile mit Weile.
2. Inhalt des I Gesanges in „Hermann und Dorothea“.
3. Die Birnbaumscene (auf Grund der Lectüre „Hermann und Dorothea“).
4. Hermanns letzter Besuch bei der reichen Kaufmannsfamilie seines Wohnortes (auf Grund der Schullectüre. Schulaufg.).
5. Das Leben eine Reise (Schulaufgabe).
6. Warum werden die Verdienste grosser Männer oft erst nach ihrem Tode anerkannt?
7. Charakter des Apothekers in „Hermann und Dorothea“ (Schulaufgabe).
8. Steter Tropfen höhlt den Stein.
9. Lebensgeschichte der Jungfrau von Orleans bis zum Krönungszuge nach Schiller (auf Grund der Schullectüre. Schulaufgabe).
10. Inhalt der Idylle „Der 70 Geburtstag“ (auf Grund der Schullectüre. Schulaufgabe).

E. Szajdzicki.

W klasie VII*b*.

1. Die Seefart, ein Bild des menschlichen Lebens.
2. „Wohlthätig ist des Feuers Macht,
Wenn sie der Mensch bezähmt, bewacht...
Doch furchtbar wird die Himmelskraft,
Wenn sie der Fessel sich entrafft,
Einhertritt auf der eignen Spur,
Die freie Tochter der Natur.“ (Schulaufgabe.)
3. Siegfrieds Tod (Auf Grund der Schullectüre).
4. Inhalt des Hildebrandsliedes (auf Grund der Schullectüre. Schulaufgabe).
5. Charakter des Wirts in Goethes „Hermann und Dorothea“ (Schulaufgabe).

6. Worin hat die Anhänglichkeit des Menschen an seine Heimat ihren Grund?
7. Die Exposition des Drama „Jungfrau von Orleans".
8. Nutzen der Eisenbahnen.
9. Inhalt der beiden Monologe in Schillers „Jungfrau von Orleans" (Schulaufgabe).
10. Klopfstocks Fahrt auf dem Zürchersee (auf Grund der Schullectüre. Schulaufgabe.

E. Szajdzicki.

W klasie VIII.

1. Ein gut Gewissen ist ein sanftes Ruhekissen.
2. Gedankengang des Schillerschen Gedichtes „Das Lied von der Glocke".
3. Des Lebens ungemischte Freude ward keinem Sterblichen zutheil.
4. Inhalt und Grundgedanke des Schillerschen Gedichtes „Der Spaziergang".
5. Wallensteins Abfall vom Kaiser (auf Grund der Schullectüre. Schulaufgabe).
6. Was macht Wallensteins Untergang so tragisch?
7. Das Grab eines Kindes (auf Grund des Gedichtes „Klage der Ceres". Schulaufgabe).
8. Schilderung der Anfangscene in Goethes „Egmont" (Schulaufgabe.
9. Scene zwischen Ferdinand und Egmont im Gefängnisse (Schulaufgabe).

E. Szajdzicki.

c) Tematy dla piśmiennego egzaminu dojrzałości.

1. Zadanie polsko-łacińskie:
   Przełożyć na język łaciński ustęp z Wypisów polskich tom II, wydanie V, str. 115 od słów: „Sokrates Ateńczyk... do: większego przyjaciela".
2. Zadanie łacińsko-polskie:
   Przełożyć na język polski z Virg. Aen. ks. XI od wiersza 1 do 38.

3. Zadanie greckie:

Przełożyć na język polski z Plat. Phaed. cap. LXVI od początku do słów: ἄγετε καὶ καρτερεῖτε".

4. Zadanie polskie:

Na podstawie czytanych utworów wykazać różnicę między dramatem starożytnym a nowoczesnym.

5. Zadanie niemieckie:

Der Musenhof in Weimar und seine Bedeutung für die deutsche Literatur.

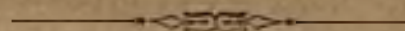
6. Zadanie matematyczne:

a) Rozwiązać równanie:

$$\left(X + \frac{2}{X^{\frac{1}{3}}}\right)\left(X - \frac{2}{X^{\frac{1}{3}}}\right) = 97\, X^{\frac{2}{3}} - \frac{1300}{X^{\frac{2}{3}}}$$

b) Wyznaczyć objętość piramidy ośmiościennej foremnej, jeżeli krawędź boczna $a = 18{\cdot}4_m$, a kąt zawarty między krawędzią boczną a wysokością piramidy wynosi $38^0\ 18'$.

c) Dane są spółrzędne wierzchołków trójkąta: (— 2, 1), (3, 4), (5, — 2); wyznaczyć spółrzędne środka koła opisanego na tym trójkącie, promień koła i równanie tego koła.



IV.

ZBIORY NAUKOWE.

---

a) Biblioteka nauczycielska.

1. Z końcem roku szk. 1894 liczyła Biblioteka 2425 dzieł w 4480 tomach i 43 zeszytach.

W r. bieżącym:

a) zakupiono 65 dzieł w 127 tomach i 2 zesz.

b) otrzymano w darze 32 dzieł w 37 tomach i 4 zesz.

Z końcem r. szk. 1895 liczy biblioteka 2522 dzieł w 4644 tomach i 49 zeszytach.

2. Zakład prenumeruje następujące czasopisma:

1. Muzeum, 2. Przewodnik bibliograficzny, 3. Przewodnik higieniczny, 4. Przewodnik naukowy i literacki, 5. Biblioteka warszawska, 6. Przegląd polski, 7. Kwartalnik historyczny, 8. Zeitschrift f. d. österr. Gymnasien, 9. Eos, 10. Oesterreichisch-ungarische Revue, 11. Lehrproben und Lehrgänge, 12. Zeitschrift f. d. physikalischen und chemischen Unterricht, 13. Inventions les nouvelles, 14. Naturwissenschaftliche Rundschau.

3. *a)* Dzieła zakupione:

1) Słownik geograficzny (c. d.). 2. Die österreichisch-ungarische Monarchie in Wort und Bild (c. d.). 3. Encyklopedya wychowawcza. T. V. zesz. 1 i 2. 4. Tarnowski i Wójcik, Wypisy polskie dla kl. wyższ. Cz. I. wyd. 2. 5. Tarnowski i Próchnicki, Wypisy polskie dla kl. wyższ. Cz. II. 6. Czubek i Zawiliński, Wypisy polskie dla IV. kl. (2 egz.). 7. Szujski, Dzieła, seryi III t. II i III. 8. Słowacki Juliusz, Dzieła, wydał Biegeleisen. 9. Le-

nartowicz, Poezye. 10. Tarnowski St., Studya do dziejów literatury XIX w. 11. Wł. Mickiewicz, Żywct A. Mickiewicza, t. IV. 12. A. Mickiewicz, Dzieła, tom trzeci. Wydanie Tow. im. A. Mickiewicza. 13. Sienkiewicz H., Rodzina Połanieckich. 14. Petelenz i Werner, Deutsches Lesebuch *a)* f. d. VII, *b)* f. d. VIII Classe. 15. Wenig, Handwörterbuch der deutschen Sprache, 7. Aufl. 16. Gude, Erläuterungen deutscher Dichtungen 9. Aufl. 17. Semkowicz, Opowiadania, Cz. II (2 egz.). 18. Zakrzewski W.. Historya powszechna. Tom II (2 egz.). 19. Hannak-Leniek, Historya i statystyka monarchii austryacko-węgierskiej. 20. Brzostowicz, Początki arytmetyki. Cz. I, wyd. 2 (2 egz.). 21. Kern, Grundriss der Pädagogig, 5 Aufl. 22. Kozłowski, Logika. 23. Solecki, Etyka katolicka, wyd. 2. 24. Steiner i Scheindler, Ćwiczenia łacińskie dla kl. II (2 egz.). 25. Ćwikliński, Gramatyka grecka, wyd. 2. 26. Schenkl-Parylak, Ćwiczenia greckie, wyd. 2. 27. Stowasser, Lateinisch Deutsches Schulwörterbuch. 28. Koch, Griech. Elementarbuch. 29. Griechische Übungsbücher von Kohl, Fecht, Lattmann und Müller. 30. Eichler, Variationen zu Tacitus. 31. Verhandlungen der 42. Versammlung deutscher Philologen in Wien. 32. T. Livi ab. urbe condita l. 36—38 ed. Zingerle (3 egz.). 33. Q. Horati Sermonum et epistularum libri mit Anmerkungen von L. Müller. 34. Girand-Popławski, Grecya. 35. Plutarchi vitae parallelae ed. Sintenis. 36. Fabulae Aesopicae ed. Hahn. 37. Fabulae romanenses ed. Eberhard. 38. Apollodori Bibliotheca ed. Bekker. 39. Müller, Handbuch der class. Alterthumswissenschaft. Halbb. XIX. u. XX. 40. Homer, Iliada, tłóm. Mleczko. 41. Cicerona Pisma krasomowcze i polityczne, tłóm. Rykaczewski. 42. Xenophons Anabasis. Auswahl von Windel. 43. Ovido Metamorphosen. Auswahl von Harder. 44. M. Tulli Ciceronis scripta quae manserunt omnia, ed. Müller et Klotz. 45. Xenophons Werke von Zeising und Rieckher. 46. Demosthenes Ausgewählte Reden von Westermann. 47. Tacitus Werke von Roth.

b) Otrzymano w darze:

1. Od wys. c. k. Min. w. i o.: Ilg, Kunstgeschichtliche Charakterbilder aus Österreich-Ungarn i Prager Studien aus dem Gebiete der class. Alterthumswissenschaft. Heft I—IV. 2. Od Wys. c. k. Rady szk. kraj.: *a)* Feliński, Konferencye duchowne, *b)* Guépin, Żywot św. Józefata, *c)* Chłędowska St., Szkice lite-

rackie i Nowelle, *d)* Katalog wystawy szkół ludowych i średnich galicyjskich (2 egz.). *e)* Sprawozdanie o stanie szkół średnich w r. 1893/4. 3. Od Akademii um. w Krakowie wydawnictwa z r. 1894—95. 4. Od Wys. Wydziału kraj.: *a)* Akta grodzkie i ziemskie t. XVI, *b)* Wiadomości statystyczne o stosunkach krajowych, t. XIV zesz. 3. XV zesz. 1, *c)* Rocznik statystyki przemysłu i handlu, *d)* Rocznik statystyki Galicyi z 1892—93. 5. Od Tow. naucz. szk. wyższ.: *a)* Steiner i Scheindler, Ćwiczenia łacińskie dla kl. II, *b)* Horacy, Wybór pism, wydali Dolnicki i Librewski, *c)* Z Xenofonta Chrestomatya, ułożył Fiderer, wyd. 2, *d)* Corn. Neposa Żywoty sławnych mężów, wyd. Kłak, wyd. 2. 6. Od kółka naukowego tarnopolskiego rocznik z 1893. 7. Od prof. Dra Stodolaka: Wychowanie fizyczne. wyd. 2 (2 egz.).

J. Taborski.

b) **Biblioteka uczniów polska.**

1. Z końcem roku szkolnego 1894 liczyła 493 dzieł w 808 tomach.

2. W roku szkolnym 1895 przybyło 28 dzieł w 73 tomach.

Z końcem roku szkolnego 1895 liczyła 521 dzieł w 881 tomach.

Zakupiono: 1. Zaleski J. B. Pisma, tomów 4. 2. Zaleski J. B. Dzieła pośmiertne (2 t.). 3. Chłędowska Stefania, Szkice literackie (2 t.). 4. Chłędowska Stefania, Nowele i szkice literackie (2 t.). 5. Wallace, Ben-Hur (2 t.). 6. Pasek, Pamiętniki (10 egz.). 7. Kalinka, Ostatnie lata panowania St. Augusta (2 t.). 8. Kalinka, Pisma pomniejsze (2 t.). 9. Tarnowski, St. Chopin i Grottger. 10. Tarnowski St., Dwa odczyty. 11. Tarnowski St., O kolędach. 12. Tarnowski St., Henryk Rzewuski. 13. Eschylosa tragedye, przeł. Węclewski. 14. Bełcikowski Adam, Ze studyów nad literaturą polską. 15. Krasiński Z., Listy (4 t.). 16. Gubrynowicz Br., Kazimierz Brodziński 1830—1835. 17. Sienkiewicz H., Listy z podróży. 18. Tenże, Listy z Afryki (2 t.). 19. Tenże Pisma, t. 20-ty, Nowele. 20. Chmielowski P., J. I. Kraszewski. 21. Tenże, Nasi powieściopisarze. 22. Szajnocha K., Dzieła (10 t.). 23. Sofokles, Tragedye, przeł. Węclewski. 24. Dzieje powszechne illustrowane cz. III, t. I. 25. Dzieje literatury powszechncj z illu-

stracyami (6 t.). 26. Słowacki J. Dzieła, wyd. Biegeleisen (6 t.). 27. Macaulay, Szkice, przeł. Tarnowski (2 t.).

Mikołaj Mazanowski.

c) Biblioteka uczniów niemiecka.

1. Z końcem roku szkolnego 1894 liczyła: 226 dzieł w 372 tomach.

2. W roku szkolnym 1895 przybyło: dzieł 19 w 31 tom. Z końcem roku szkolnego 1895 liczyła: 245 dzieł w 403 tomach.

Zakupiono: 1. Shakespeare's Macbeth. 2. Lessings Minna von Barnhelm. 3. Herders, Der Cid. 4. Die deutsche Heldensage von Prosch u. Wiedenhofer. 5. Franz Otto, Männer eigener Kraft von Richard Roth. 6. S. Wörishöffer, Gerettet aus Sibirien. 7. Des Freiherrn von Münchhausen Reisen und Abenteuer nach Bürger für die Jugend bearbeitet von Franz Hoffmann. 8. Ferdinand Zöhrer, Österreichisches Fürstenbuch. 9. Dr Karl Oppel, Das alte Wunderland der Pyramiden. 10. Otto Hoffman, Im fernen Westen. 11. A. Groner, Die Heldenthaten unserer Vorfahrer. 12. Don Quixote von La Manche nach M. Cervantes von Franz Hoffmann. 13. Lederstrumpf nach Cooper von Oskar Höcker. 13. Die österreichisch-ungarische Monarchie in Wort und Bild, I Abtheilung des XIV Bandes: Böhmen. 15. Zwei Streiter des Herrn von Oskar Höcker. 16. Die Helden der Neuzeit von Theodor Dielitz.

Otrzymano w darze od p. Dyrektora Karola Brzezińskiego: 1. Uhlands Gedichte und Dramen, I Theil, illustriert von Otto Herrfarth und Karl Storch. 2. Uhlands Gedichte und Dramen, II Theil. 3. Schillers Kabale und Liebe, illustriert von Karl Larsson.

Euzebiusz Szajdzicki.

d) Zbiór historyczno-geograficzny.

W roku szkolnym 1895 zakupiono: 1. Ehrarda, Mapa Francyi. 2. Waleryana Hecka: Mapa historyczna Polski. 2 egzempl.

3. Prof. Dra Gustawicza, Mapa Europy w drugiej połowie XVI w. 4. St. Cybulskiego, 5 obrazów historycznych.

Wł. Alexandrowicz.

e) Gabinet fizyczny.

Kupiono w roku 1895: 1. Baterya termoelektryczna. 2. Przyrząd do okazania rozszerzania się ciał. 3. Motorek elektryczny. 4. Kula pływająca w zimnej wodzie. 5 Goniometr. 6. Falownica według Weinholda. 7. Przyrząd do okazania, że elektryczność gromadzi się tylko na powierzchni ciał. 8. Przyrząd do okazania praw stałości ciał. 9. Przyrząd dźwigniowy mosiężny. 10. Przyrząd do galwanoplastyki z przyborami. 11. Dwie tablice przedstawiające światło polarne.

A. M. Kawecki.

f) Gabinet historyi naturalnej.

Zakupiono: 1. Tablice ścienne do anatomii Eichnera i Wenzla. 2. Ausländische Culturpflanzen Zippla i Bollmanna, część III. 3. Tablice ścienne do geologii Fraasa. 4. Model narzędzi pyszczkowych szczypicy. 5. Rubus erectus, model kwiatu i owocu. 6. Modele grzybów: Boletus edulis, Agaricus campestris, Morchella esculenta. 7. 21 preparatów mikroskopowych zoologicznych i botanicznych.

W. Kulczyński.

g) Wzory rysunkowe.

Zakupiono w r. sz. 1895: 1. Ornamentów gipsowych 14 sztuk. 2. Nagłówków pilastrowych 3. 3. Biustów gipsowych 2. 4. Medalion. 5. Płaskorzeźba.

T. Trnka.

V.

Ważniejsze rozporządzenia Władz szkolnych

z roku szkolnego 1895.

---

1. Wys. c. k. Rada szk. kraj. okólnikiem z 5 grudnia 1894 l. 29753 wydaje instrukcyę w sprawie zakupna środków naukowych.
2. Jego Ekscelencya Pan Minister W. i O. reskryptem z dnia 28 listopada 1894 l. 18637 ustanawia normy obliczania renumeracyj, udzielanych zastępcom nauczycieli za nadliczbowe godziny nauki.
3. Wys. c. k. Rada szk. kraj. okólnikiem z 11 grudnia 1894 l. 30163 wydaje „Wskazówki dydaktyczne“ z poleceniem zastosowania przy nauce szkolnej.
4. Wys. c. k. Rada szk. kraj. okólnikiem z dnia 6 lutego 1895 l. 2188 zarządziła, by w dniach 4 maja i 28 czerwca, na które przypadają nabożeństwa żałobne, tudzież w środę popielcową nauka szkolna rozpoczynała się dopiero o godzinie 11 przed południem.
5. Wysoka c. k. Rada szkolna krajowa zaliczyła w poczet książek szkolnych:

   a) okól. z 14 czerwca 1894 l. 11169: „Korneliusza Neposa Żywoty sławnych mężów“, wydał Wiktor Kłak, wyd. II, Lwów, 1894;

   b) okól. z 28 września 1894 l. 16868: „Chrestomatya

z pism Xenofonta“, wydał Ed. Fiderer, wyd. II, Lwów, 1894;

c) okól. z 30 września 1894 l. 18281: „Krótki rys geografii do użytku szkolnego“, wyd. Benoni i Tatomir, wyd. VI, Lwów, 1894;

d) okól. z 3 października 1894 l. 18622: „Wypisy polskie dla klas wyższych szkół gimnazyalnych“, część I, przez Tarnowskiego i Wójcika, wyd. II, Lwów, 1894;

e) okól. z 30 września 1894 l. 18940: „Książka do nauki języka francuskiego“, część II, Amborski, Lwów, 1894;

f) okól. z 28 września 1894 l. 19189: „Ćwiczenia łacińskie dla klasy II“ według książki Steinera i Scheindlera, Lwów 1894;

g) okól. z 12 października 1894 l. 15879: „Historya biblijna dla szkół średnich“ przez ks. Tomasza Dąbrowskiego, Stanisławów, 1894;

h) okól. 15 października 1894: „Kawecki i Tomaszewski, Fizyka, krótki rys kosmografii i chemii, dla niższych klas szkół średnich“, Kraków, 1894;

i) okól. z 2 listopada 1894 l. 25601: „Wypisy polskie dla klas wyższych szkół realnych i seminaryów nauczycielskich“ przez R. Bobina, część I, Lwów, 1894;

k) okól. z 7 października 1894 l. 17347: *α*) „Wypisy polskie dla kl. II szkół gimnazyalnych i realnych“, przez Próchnickiego i Wójcika, Lwów, 1893; β) „Wypisy polskie dla kl. III szkół gimnazyalnych i realnych“ przez J. Czubka i R. Zawilińskiego, Lwów, 1894; γ) „Wypisy polskie dla kl. IV szkół gimnazyalnych i realnych“ przez J. Czubka i R. Zawilińskiego, Lwów, 1894;

l) okól. z 12 marca 1895 l. 4395: „Kw. Horacego Flakkusa wybór pism. Do użytku szkolnego wydali J. Dolnicki i S. Librewski, Lwów, 1894;

ł) okól. z 14 marca 1895 l. 6804: Homera Odysseja w skróceniu. Wydanie A. T. Christa przerobił i do potrzeb gimnazyów polskich zastosował Dr Michał Jezienicki, Lwów, 1894;

m) okól. z 18 lutego 1895 l. 29356: „M. Tulliusza Cycerona mowa za poetą Archiaszem". Wydanie II. Nohla. Do potrzeb gimnazyów polskich zastosował S. Bednarski, Wiedeń, Tempsky, 1894;

n) okól. z 24 marca 1895 l. 5918: „Dr Hugo Zathey, Antologia grecka", Lwów, 1895;

o) okól. z 19 kwietnia 1895 l. 7873: „Nauka fizyki, podręcznik dla niższych klas gimnazyów i szkół realnych". Ułożył Józef Solecki, wyd. III, Lwów, 1894.

6. Wys. c. k. Rada szk. kraj. okólnikiem z dnia 14 grudnia 1894 l. 111740 poleciła do bibliotek szkolnych dla młodzieży dzieło p. t.: „Reinhold Heidenstein, Pamiętniki o wojnie moskiewskiej w VI księgach". Tłómaczył Jan Czubek, Lwów, 1894.

* * *

Jak w latach poprzednich tak i w roku ostatnim starał się zakład, o ile warunki, w jakich się znajduje, pozwalały na to, także o fizyczny rozwój młodzieży szkolnej. Do tego celu zmierzały przedewszystkiem ćwiczenia gimnastyczne, jakie w porze letniej odbywały się codziennie na przyrządach, ustawionych w podwórzu gimnazyalnem oraz ćwiczenia wolne podczas tak zwanych pauz czyli przerw o godzinie 10, 11 i 12. Wspomnianemi ćwiczeniami, których program ułożony z góry obejmował młodzież wszystkich klas, kierował w ostatnim roku szkolnym zastępca nauczyciela Michał Ptaszyk, przy czem inni nauczyciele dozorując młodzież szli mu chętnie z pomocą. Ćwiczenia gimnastyczne odbywały się na krążniku, na linie, drabinie sznurowej i żerdziach do spinania się, na skoczni w dal i skoczni w górę, na poziomej i pochyłej równoważni. Natomiast gra w piłkę (Lawn Tennis) odbywała się tylko w czasie wycieczek za miasto dla braku odpowiedniego miejsca w samym zakładzie. Oprócz tego wspomniany powyżej kierownik ćwiczeń i gospodarze, zwłaszcza klas niższych i średnich podejmowali częstsze wycieczki z młodzieżą w okolice miasta w czasie wolnym od zajęć szkol-

nych, w dniu zaś 9 maja przedsięwziął zakład wycieczkę na Bielany z młodzieżą wszystkich klas.

W porze zimowej korzystała młodzież szkolna licznie z uprzejmości tak właściciela Parku krakowskiego, jakoteż Klubu łyżwiarskiego, którzy dla niej zniżyli cenę wstępu na tory łyżwiarskie do połowy.



VI.

Kronika Zakładu.

Rok szkolny 1894/5 rozpoczął się uroczystem nabożeństwem dnia 3 września.

Egzamina wstępne do klasy I odbyły się częścią z końcem roku szkolnego 1894, częścią zaś z początkiem roku 1894/5 w dniach 1 i 2 września.

Wys. c. k. Rada szk. kraj. rozporządzeniem z dnia 9 lipca 1894 l. 14126 uwolniła od służby zastępcę nauczyciela Włodzimierza Służewskiego na własną jego prośbę, a na jego miejsce zamianowała dekretem z dnia 17 lipca 1894 l. 13491 ks. Antoniego Stańkę zastępcą nauczyciela w tutejszym zakładzie.

Wys. c. k. Rada szk. kraj. rozporządzeniem z dnia 27 lipca 1894 l. 12646 przeniosła tutejszego zastępcę nauczyciela Arsyniego Dorożyńskiego do c. k. gimnazyum w Jarosławiu.

Jego Ekscelencya Pan Minister W. i O. reskryptem z dnia 6 lipca 1894 l. 13562 przeniósł profesora c. k. gimnazyum w Drohobyczu Euzebiusza Szajdzickiego na własną jego prośbę w tym samym charakterze służbowym do tutejszego zakładu, równocześnie zaś zamianował tutejszego zastępcę nauczyciela Wojciecha Grzegorzewicza rzeczywistym nauczycielem c. k. gimnazyum w Stryju.

Wys. c. k. Rada szk. kraj. dekretem z dnia 21 sierpnia 1895 l. 15347 zamianowała kandydata nauczycielskiego Stanisława Sobińskiego zastępcą nauczyciela w tutejszym zakładzie.

Wys. c. k. Rada szk. kraj. rozporządzeniem z dnia 8 wrze-

śnia 1894 l. 19643 zatwierdza podział klas I, II, III i VII na klasy równorzędne.

Wys. c. k. Rada szk. kraj. dekretem z dnia 7 września 1894 l. 19642 zamianowała kandydata nauczycielskiego Gerarda Felińskiego zastępcą nauczyciela w tutejszym zakładzie.

Jego Ekscelencya Pan Minister W. i O. reskryptem z dnia 15 sierpnia 1894 l. 18991 udzielił zniżenia godzin naukowych do połowy profesorowi Józefowi Tułasiewiczowi na przeciąg roku szkolnego 1895.

Wys. c. k. Rada szk. kraj. dekretem z dnia 25 września 1894 l. 20040 przyznała profesorowi Józefowi Tułasiewiczowi czwarty dodatek pięcioletni.

Wys. c. k. Rada szk. kraj. dekretem z dnia 25 września 1894 l. 21008 zatwierdziła nauczyciela Mikołaja Mazanowskiego w zawodzie nauczycielskim i nadała mu tytuł profesora.

Wys. c. k. Rada szk. kraj. dekretem z dnia 16 października 1894 l. 23310 przyznała profesorowi Feliksowi Baczakiewiczowi czwarty dodatek pięcioletni.

W dniach od 24 do 30 października 1894 przedsięwziął lustracyę tutejszego zakładu c. k. Inspektor krajowy szkół gimnazyalnych JW. Pan Dr Ludomił German.

Jego Ekscelencya Pan Minister W. i O. reskryptem z dnia 15 października 1894 l. 23205 przeniósł profesora Józefa Rozwadowskiego dla braku zdrowia, na własną jego prośbę, w stan czasowego spoczynku.

Jego Ekscelencya Pan Minister W. i O. reskryptem z dnia 24 października 1894 l. 22588 udzielił profesorowi Feliksowi Baczakiewiczowi urlopu na przeciąg pierwszego półrocza r. szkol. 1895.

Wys. c. k. Namiestnictwo reskryptem z dnia 10 grudnia 1894 l. 92686 nadało uczniowi IV klasy Julianowi Solarskiemu stypendyum w rocznej kwocie 100 złr. z fundacyi ś. p. ks. Borka.

Wydział krajowy uchwałą z dnia 14 stycznia 1895 l. 2985 nadał uczniowi klasy VI, Bronisławowi Krzyżanowskiemu, stypendyum w rocznej kwocie 157 złr. 50 kr. z fundacyi ś. p. Samuela Głowińskiego.

W dniach 4 października i 19 listopada obchodził zakład Imieniny Najjaśniejszych Państwa uroczystem nabożeństwem;

również brał udział w nabożeństwach żałobnych za duszę ś. p. Cesarzowej Maryi Anny i Cesarza Ferdynanda I.

W dniu 30 stycznia 1895 zakończono pierwsze półrocze, drugie zaś rozpoczęto w dniu 4 lutego.

Wys. c. k. Rada szk. kraj. reskryptem z dnia 3 lutego 1895 l. 1135 i 1670 poleciła dyrekcyi uwolnić od służby zastępcę nauczyciela ks. Antoniego Stańkę a na jego miejsce zamianowała zastępcę nauczyciela Władysława Krukowskiego.

Jego Ekscelencya Pan Minister W. i O. reskryptem z dnia 19 stycznia 1895 l. 942 udzielił zastępcy nauczyciela Ignacemu Meyerowi zmniejszenia liczby godzin naukowych na przeciąg drugiego półrocza r. s. 1895.

Jego Ekscelencya Pan Minister W. i O. reskryptem z dnia 19 stycznia 1895 l. 360 przeniósł profesora c. k. gimnazyum rzeszowskiego Piotra Cetnarowskiego na własną jego prośbę w tym samym charakterze służbowym do tutejszego zakładu.

Wys. c. k. Rada szk. kraj. dekretem z dnia 20 lutego 1895 l. 3262 i 3263 przyznała dyrektorowi Tadeuszowi Skubie i profesorowi Leonowi Krókowskiemu piąty dodatek pięcioletni.

Wydział krajowy uchwałą z dnia 5 marca 1895 l. 14363 nadał uczniowi klasy VIII, Tadeuszowi Polakowi, stypendyum w kwocie rocznej 150 złr. z fundacyi ś. p. Dra Towarnickiego.

Pisemne egzamina dojrzałości odbyły się w zakładzie tutejszym w dniach od 13 do 17 maja, ustne zaś pod przewodnictwem profesora uniwersytetu Jagiellońskiego WP. Dra Anatola Lewickiego w dniach od 5 do 11 czerwca b. r. Wynik egzaminu dejrzałości podaje się pod koniec sprawozdania.

W ciągu roku szkolnego przystępowała młodzież katolicka trzy razy do św. Sakramentów spowiedzi i komunii; nadto odprawiała w czasie wielkanocnym trzydniowe rekolekcye.

Rok szkolny zakończono dnia 29 czerwca uroczystem nabożeństwem i rozdaniem świadectw.

* * *

† Dnia 19 stycznia 1895 r. umarł jeden z członków grona nauczycielskiego gimnazyum św. Jacka, profesor Feliks Baczakiewicz.

Ś. p. Feliks Baczakiewicz urodził się w Tuchowie d. 22 kwietnia 1846 r. Po złożeniu egzaminu dojrzałości w gimnazyum Franciszka Józefa we Lwowie przez dwa lata kształcił się w szkole kadeckiej w Peszcie; przerwawszy jednak dalsze studya wojskowe, zapisał się na wydział filozoficzny uniwersytetu Jagiellońskiego. Przez czas krótki po ukończeniu uniwersytetu sprawował obowiązki zastępcy nauczyciela w gimnazyum św. Jacka w Krakowie; w r. 1874 mianowany był rzeczywistym nauczycielem gimn. w Jaśle; w r. 1881 przeniesiony napowrót do gimn. św. Jacka do Krakowa, gdzie z krótkiemi przerwami aż do samej śmierci sumiennie oddawał się zawodowym obowiązkom, chociaż z powodu choroby płucnej na zdrowiu często i coraz groźniej zapadał.

Obrzęd pogrzebowy odbył się d. 21 stycznia przy licznym współudziale publiczności, nauczycielstwa i młodzieży. Dnia następnego młodzież wraz z przełożonymi zakładu wzięła udział w nabożeństwie żałobnem za duszę zmarłego.

Ś. p. Feliks Baczakiewicz odznaczał się dobrocią serca i wytrwałością w pełnieniu obowiązków: umiał sobie zdobyć przywiązanie uczniów i szczerą przyjaźń współkolegów. Cześć jego pamięci!

Statystyka uczniów.

Tytuły	I		II		III		IV	V	VI	VII		VIII	Razem
	a	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*				*a*	*b*		
1. Liczba uczniów:													
Z końcem roku szk. 1894 .	36	39	35	35	33	28	40	45	59	33	—	38	421
Z początkiem r. szk. 1895 .	48	48	34	35	33	31	53	37	43	30	30	35	457
Przyjęto w ciągu r. s. 1895.	1	2	1	1	2	1	2	3	—	—	2	2	17
Ogółem przyjęto w r. s. 1895	49	50	35	36	35	32	55	40	43	30	32	37	474
a mianowicie:													
Z obcych zakładów:													
a) z promocyą.	43	42	2	2	6	3	2	5	—	2	2	3	112
b) repetentów	3	2	2	2	1	3	—	2	—	—	2	—	17
Z tutejszego zakładu:													
a) z promocyą.	—	—	28	28	27	26	49	33	40	28	28	31	318
b) repetentów	3	6	3	4	1	—	4	—	3	—	—	3	27
W ciągu roku wystąpiło . .	9	5	7	5	6	5	1	2	2	1	4	2	49
L. ucz. z końcem r. s. 1895.	40	45	28	31	29	27	54	38	41	29	28	35	425
a mianowicie:													
a) publicznych.	39	45	27	30	28	27	53	37	39	29	28	35	417
b) prywatnych.	1	—	1	1	1	—	1	1	2	—	—	—	8
2. Według miejsca urodzenia:													
Z W. Ks. Krakowskiego . .	18	17	15	15	11	14	21	20	20	14	13	13	191
Z Galicyi	18^1	23	12^1	12^1	14^1	11	27^1	15	17^1	14	13	19	195^6
Z innych krajów koronnych.	1	—	—	1	—	—	—	$—^1$	1^1	1	—	2	6^2
Z poza Austryi	2	5	—	2	3	2	5	2	1	—	2	1	25
Razem . .	39^1	45	27^1	30^1	28^1	27	53^1	37^1	39^2	29	28	35	417^8
3. Według narodowości:													
Polaków	38^1	45	27^1	30^1	28^1	26	53^1	35	38^2	28	28	32	408^7
Rusinów.	1	—	—	—	—	1	—	2	1	1	—	2	8
Niemców	—	—	—	—	—	—	—	$—^1$	—	—	—	—	$—^1$
Czechów	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1
Razem . .	39^1	45	27^1	30^1	28^1	27	53^1	37^1	39^2	29	28	35	417^8
4. Według wyznania:													
rzymsko-katolickiego . . .	31^1	35	20^1	23^1	23^1	19	34^1	21^1	28	19	20	26	299^6
grecko-katolickiego. . . .	1	—	—	—	—	1	—	2	1	1		2	8
ewangelickiego	2	—	—	—	—	--	3	1	—	—	1	—	7
mojżeszowego.	5	10	7	7	5	7	16	13	10^2	9	7	7	103^2
Razem . .	39^1	45	27^1	30^1	28^1	27	53^1	37^1	39^2	29	28	35	417^8
5. Wiek uczniów:													
11 lat liczyło	9	8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	17
12 „ „	9	10	4	5	—	—	—	—	—	—	—	—	28
13 „ „	9	10	6	6	10^1	13	—	—	—	—	—	—	54^1
14 „ „	6^1	5	8	7^1	5	4	9	—	—	—	—	—	44^2
15 „ „	4	9	6	9	6	7	17	12	—	—	—	—	70
16 „ „	2	1	1	1	3	2	15	8	3^1	—	—	—	36^1
17 „ „	—	2	1	2	3	1	6^1	10	20^1	8	4	—	57^2
18 „ „	—	—	1^1	—	1	—	4	4^1	10	8	8	10	46^2
19 „ „	—	—	—	—	—	—	1	3	3	7	6	6	26
20 „ „	—	—	—	—	—	—	1	—	2	4	7	7	21
21 „ „	—	—	—	—	—	—	—	—	1	2	3	8	14
22 „ „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4	4
Razem . .	39^1	45	27^1	30^1	28^1	27	53^1	37^1	39[illegible]	29	28	35	417^8

Tytuły	I a	I b	II a	II b	III a	III b	IV	V	VI	VII a	VII b	VIII	Razem
6. Klasyfikacya uczniów za 2 półr.													
Stopień celujący otrzymało .	3	4	4	3	1	—	3	1	4^{2}	1	3	4	31^{2}
„ I. „ .	27	24	20^{1}	21	19^{1}	19	42^{1}	29^{1}	27	21	19	24	292^{4}
„ II. „ .	3	5	—	1	4	5	2	4	4	1	—	—	29
„ III. „ .	—	5	2	1	2	1	3	2	—	—	—	—	16
Do egz. popr. przypuszcz. .	6^{1}	7	1	4	2	2	3	1	4	6	6	7	49^{1}
Nie klasyfikowano	—	—	—	$—^{1}$	—	—	—	—	—	—	—	—	$—^{1}$
Razem . .	39^{1}	45	27^{1}	30^{1}	28^{1}	27	53^{1}	37^{1}	39^{2}	29	28	35	417^{8}
7. Opłaty szkolne:													
Opłatę szkolną płaciło:													
w I półroczu	23	23	11^{1}	12	6^{1}	11	16^{1}	11^{1}	15^{2}	11	11	16	166^{6}
w II półroczu	10^{1}	14	9^{1}	5^{1}	7^{1}	10	23^{1}	18^{1}	19^{2}	9	11	17	152^{8}
Od połowy uwolniono:													
w I półroczu	—	—	—	—	—	1	—	2	—	—	—	—	3
w II półroczu	—	—	—	—	—	1	—	1	1	—	—	—	3
Od całej opł. uwolniono:													
w I półroczu	22	23	18	21	25	19	37	25	23	18	18	20	269
w II półroczu	29	31	18	25	21	16	30	18	19	20	17	18	262
Opłata szkolna wynosiła:													
w I półroczu	460	460	240	240	140	230	310	260	340	220	220	320	3470
w II półroczu	220	280	200	120	160	210	480	390	430	180	220	340	3230
Razem . .	680	740	440	360	300	440	820	650	770	400	440	660	6700
Taksy wstępne wynosiły . .	96·6	92·4	6·3	12·6	16·8	12·6	4·2	16·8	—	4·2	12·6	6·3	281·4
Datki na środki naukowe .	49	50	35	36	35	32	55	40	43	30	32	37	474
Taksy za dupl. świadectw .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	21
8. Frekwencya na naukę przedmiotów nadobowiązkowych:													
Historya kraju rodzinnego .	—	—	—	—	28	27	53	—	—	29	28	—	165
Język francuski	—	—	—	—	4	4	12	7	1	6	4	2	40
Kaligrafia	24	17	6	10	—	—	—	—	—	—	—	—	57
Rysunki	5	3	2	7	5	—	8	—	—	2	1	—	33
Śpiew	5	3	8	5	5	1	7	3	12	4	8	4	65
Religia mojżeszowa	5	10	7	7	5	7	16	13	10	9	7	7	103
Gimnastyka	24	23	11	12	12	6	18	11	10	13	9	—	149
9. Stypendya.													
Stypendya pobierało . . .	—	—	—	—	—	—	3	1	1	1	1	3	10
Łączna kwota pobr. styp. .	—	—	—	—	—	—	287·5	150	157·5	450	100	407·5	1552·5

VIII.

Pomoc koleżeńska.

W roku szkolnym 1895 wpłynęło składek dobrowolnych na rzecz biednych uczniów 106 złr. 63 cnt.; z roku zeszłego pozostało 12 złr. 87 cnt., co razem czyni 119 złr. 50 cnt., którą to sumę użyto w całości na wsparcie najbiedniejszych uczniów tutejszego zakładu.

Ks. Wojciech Siedlecki.

IX.

KLASYFIKACYA UCZNIÓW

za drugie półrocze r. szk. 1895.

Klasa I. a.

1. **Duliński Piotr**
2. **Piekarczyk Stanisław**
3. **Szeliga Stanisław**
4. Abłamowicz Tadeusz.
5. Arzt Kazimierz
6. Dutkiewicz Tadeusz
7. Ekier Antoni
8. Gallus Władysław
9. Gabryel Czesław.
10. Gulkowski Andrzej
11. Hajnos Kazimierz
12. Hoffmann Szymon
13. Horowitz Gabryel
14. Józefik Władysław
15. Iwanicki Tadeusz
16. Korpal Kazimierz
17. Kuchyt Wilhelm
18. Löwy Leopold
19. Odachowski Bolesł.
20. Połasiński Józef
21. Plata Tadeusz
22. Romanowski Michał
23. Seweryński Maks.
24. Simon Gustaw
25. Sponder Feliks
26. Swierczek Jan
27. Uznański Leon
28. Verständig Naftali
29. Walas Walenty
30. Zieleniewski Ludw.

Do egzaminu poprawczego przeznaczono 7, stopień drugi otrzymało 3 uczniów.

Klasa I. b.

1. **Hrapkowicz Karol**
2. **Hubaczek Eugeniusz**
3. **Silberstein Henryk**
4. **Trepka Bronisław**
5. Biliński Mieczysław
6. Burstyn Berysz
7. Drabik Jan
8. Eminowicz Wincenty
9. Fromowitz Samuel
10. Fryc Paweł.
11. Gajewski Lesław
12. Godawski Stanisł.
13. Gołębiowski Walery
14. Górnisiewicz Jan
15. Jarosz Walenty
16. Kotulecki Franc.
17. Krzywda Ludwik
18. Loria Leon
19. Patelski Bolesław
20. Przyjemski Antoni
21. Pudek Jan
22. Staich Władysław
23. Stoch Stanisław
24. Stocki-Sosnowski W.
25. Turchan Jan
26. Wetzstein Mojżesz
27. Wortsmann Mojżesz
28. Wroński Zygmunt

Do egzaminu poprawczego przeznaczono 7, stopień drugi otrzymało 5, stopień trzeci 5 uczniów.

Klasa II. a.

1. **Cholewa Wojciech**
2. **Komala Józef**
3. **Nüssenfeld Józef**
4. **Ochmański Alfons**
5. Bański Emil
6. Brenner Izydor
7. Dulski Bronisław
8. Fränkel Leon
9. Górzecki Stanisław
10. Gutmann Ignacy
11. Jachimowicz Maryan
12. Konopnicki Edward
13. Kostrzewski Józef
14. Kulczycki Stanisław
15. Kurek Jan

16. Lankosz Walenty	20. Salawa Michał	24. Żebrawski Mieczysł.
17. Margulies Dawid	21. Tafler Hajm	
18. Niedzielski Julian	22. Woliński Władysł.	Prywatysta
19. Pachulski Stanisław	23. Zapała Józef	25. Engl Władysław

Do egzaminu poprawczego przeznaczono 1, stopień trzeci otrzymali 2 uczniowie.

Klasa II. b.

1. **Jabłoński Stanisław**	9. Grabkowski Miecz.	17. Rosenzweig Mojż.
2. **Marczyński Jan**	10. Granatowski Ludw.	18. Rychłowski Feliks
3. **Rothhirsch Roman**	11. Janik Wincenty	19. Sapalski Maryan
4. Burstyn Hersch	12. Janikowski Bolesł.	20. Sniatyński Feliks
5. Cieź Józef	13. Kopczyński Winc.	21. Szwejkowski Bol.
6. Dembowski Stanisław	14. Leser Maurycy	22. Szybowski Wład.
7. Fendler Saul	15. Litman Feiwel	23. Taborski Józef
8. Gołemberski Michał	16. Nawrot Edward	24. Watzl Edward

Do egzaminu poprawczego przeznaczono 4, stopień drugi otrzymał 1, stopień trzeci 1 uczeń.

Klasa III. a.

1. **Pokorny Bruno**	8. Gorecki Piotr	14. Królikowski Antoni
2. Barański Józef	9. Grosmann Haskel	15. Matusiński Władysł.
3. Cylicki Adam	10. Juras Jan	16. Niżyński Kazimierz
4. Feldblum Szymon	11. Kaczmarczyk Józef	17. Nowak Stanisław
5. Freundlich Mojżesz	12. Kasprzyk Antoni	18. Schrot Edward
6. Fuk Leon	13. Kosiba Stefan	19. Wimmer Tadeusz
7. Gaertner Władłsław		20. Zaporowski Jan.

Do egzaminu poprawczego przeznaczono 2, stopień drugi otrzymało 4, stopień trzeci 2 uczniowie.

Klasa III. b.

1. Buliński Mieczysław	7. Goldwasser Maks.	14. Paczowski Andrzej
2. Bulwa Dawid	8. Gumplowicz Abrah.	15. Rittermann Wilhelm
3. Dawidowski Karol	9. Jeż Franciszek	16. Rosenhauch Edm.
4. Dąbrowski Tadeusz	10. Kaufmann Mojżesz	17. Schedy Otto
5. Engelmann Edward	11. Łatkiewicz Maryan	18. Süsskind Wilhelm
6. Feliś Karol	12. Mika Maryan	19. Siekierski Bronisł.
	13. Münnich Edward	

Do egzaminu poprawczego przeznaczono 2, stopień drugi otrzymało 5, stopień trzeci 1 uczeń.

Klasa IV.

1. **Kondraczek Stefan**	9. Eminowicz Ludwik	16. Góra Stefan
2. **Luberdowicz Jan**	10. Faust Eliasz	17. Gottlieb Samuel
3. **Solarski Julian**	11. Fdndler Samuel	18. Gronner Wilhelm
4. Ader Zygmunt	12. Fischer Stanisław	19. Halpern Edward
5. Altendorf Szymon	13. Gabryś Adam	20. Hornof Józef
6. Buchała Stanisław	14. Glücksmann Zygm.	21. Iwanicki Czesław
7. Długocki Franciszek	15. Goldberger Ure vel Ulryk	22. Kała Józef
8. Domański Władysław		23. Krzyżanowski Wac.

24. Kurzawa Franciszek
25. Landau Lewy Izaak
26. Lehrfreund Zygmunt
27. Leuchter-Wolf Hirsch
28. Maj Jan
29. Margulies Joachim
30. Mastalski Stanisław
31. Maziarski Stanisław
32. Molkner Stanisław
33. Opidowicz Antoni
34. Opioła Władysław
35. Paszek Wojciech
36. Pardyak Ferdynand
37. Pers Karol
38. Potocki Antoni
39. Radwański Władysł.
40. Rubinstein Aron
41. Simon Jan
42. Suwada Karol
43. Tomaszewski Jan
44. Wandasiewicz Tad.
45. Knaus Konrad

Do egzaminu poprawczego przeznaczono 3, stopień drugi otrzymało 2, stopień trzeci 3 uczniów.

Klasa V.

1. **Błachociński Stanisław**
2. Armhaus Adolf
3. Dąbrowski Mar. Fran.
4. Deiches Maksymilian
5. Dominik Maryan
6. Droździkowski Alfred
7. Eichhorn Fryderyk
8. Filimowski Stanisław
9. Fromowitz Wolff
10. Gutmann Maurycy
11. Hankiewicz Izydor
12. Herz Markus
13. Jarczyk Stanisław
14. Kampf Leopold
15. Landau Jonasz
16. Liszka Jan
17. Lustgarten Władysł.
18. Maykowski Stanisł.
19. Menschek Henryk
20. Ochmański Adam
21. Piotrowski Jan
22. Prokesch Joachim
23. Schek Julian
24. Schneider Jan
25. Słomka Jan
26. Sobolewski Sewer.
27. Szarek Mieczysław
28. Walewski Stanisław
29. Wasserberg Izaak
30. Wandasiewicz Ad.

Do egzaminu poprawczego przeznaczono 1, stopień drugi otrzymało 4, stopień trzeci 2 uczniów.

Klasa VI.

1. **Cieślik Antoni**
2. **Kaufmann Hugo**
3. **Krzyżanowski Bronisł.**
4. **Płonka Ludwik**
5. Bilski Klemens
6. Dalet Józef
7. Filipkiewicz Władysł.
8. Filochowski Stefan
9. Gaertner Eustachy
10. Gałuszka Alfred
11. Gargul Karol
12. Gisman Edward
13. Gargoń Franciszek
14. Gutmann Maksymil.
15. Hermann Leon
16. Korczyński Antoni
17. Korngold Józef
18. Krókowski Roman
19. Kus Józef
20. Lauer Samuel
21. Mirtenbaum Leon
22. Muszyński Eugen.
23. Myszkowski Edw.
24. Romański Wiktor
25. Rudolphi Adam
26. Schönwetter Henr.
27. Soldinger Henryk
28. Szafrański Feliks
29. Szymczykiewicz K.
30. Tarnawski Mieczysł.
31. Wyporek Szczepan

Do egzaminu poprawczego przeznaczono 4, stopień drugi otrzymało 4 uczniów.

Klasa VII. a.

1. **Reiner Ryszard**
2. Arzt Władysław
3. Chrzan Bogusław
4. Cybulski Teodor
5. Dürr Aleksander
6. Einäugler Julian
7. Feuereisen Mojżesz
8. Fruchthändler Chajn
9. Gulkowski Stanisł.
10. Korzeniowski Alfr.
11. Kremler Hirsch
12. Lehrfreund Michał
13. Liebermann Emil
14. Mieszkowski Zygm.
15. Nowacki Tadeusz
16. Rapaport Leon
17. Reiner Pinkus
18. Skuba Stanisław
19. Sosnowski Kazim.
20. Wachal Czesław
21. Wierzejski Stanisł.
22. Zakrzeński Karol

Do egzaminu poprawczego przeznaczono 6, stopień drugi otrzymał 1 uczeń.

Klasa VII. b.

1. **Gołąb Stanisław**
2. **Krzęciosz Jan**
3. **Süsskind Dawid**
4. Beckmann Ignacy
5. Dobrowolski Marceli
6. Dorfner Maksymilian
7. Faust Simon
8. Filimowski Ludwik
9. Friedmann Maurycy
10. Goldgart Maurycy
11. Gryglowski Karol
12. Gutwiński Franc.
13. Karabiński Feliks
14. Kasprzyk Benedykt
15. Korolewicz Piotr
16. Krawczyński Franc.
17. Kubelka Zygmunt
18. Muszyński Czesław
19. Podobiński Kazim.
20. Sławiński Ignacy
21. Weinheber Fryder.
22. Wozniczka Ignacy

Do egzaminu poprawczego przeznaczono 6 uczniów.

Klasa VIII.

Stopień celujący otrzymało	4
Stopień pierwszy otrzymało	24
Do egzaminu poprawczego przeznaczono .	7
Razem .	35

Wynik egzaminu dojrzałości.

Do egzaminu dojrzałości zgłosiło się:

a) uczniów publicznych	27
b) eksternistów	3
Razem .	30

Egzamin dojrzałości z odznaczeniem złożyli:

1. Chmurski Antoni z Krakowa, ur. 1877
2. Polak Tadeusz z Glińska, ur. 1877
3. Wasserberger Leon z Krakowa, ur. 1877

Za dojrzałych uznani zostali:

4. Barberowski Karol z Krakowa, ur. r. 1877.
5. Batko Józef z Sygneczewa, ur. r. 1876.
6. Closmann Juliusz z Bud Przeworskich, ur. r. 1874.
7. Fiałkiewicz Czesław z Lubaczowa, ur. r. 1875.
8. Hanusz Stanisław z Łańcuta, ur. r. 1877.
9. Kirchmajer Piotr z Krakowa, ur. r. 1876.
10. Kovař Antoni z Hranic na Morawach, ur. r. 1875.
11. Kucik Paweł z Woli Radziszowskiej, ur. r. 1874.
12. Leinkram Michał z Krakowa, ur. r. 1875.
13. Leonhard Stanisław z Polskiej Ostrawy (Śląsk), ur. r. 1874.
14. Lewicki Emilian z Kołomyi, ur. r. 1875.
15. Macheles Zygmunt z Krakowa, ur. r. 1877.
16. Mięsowicz Władysław ze Lwowa, ur. r. 1877.
17. Mika Wincenty z Czernichowka, ur. r. 1874.
18. Nadel Mendel z Krakowa, ur. r. 1877.

19. Piotrowski Teofil z Krakowa, ur. r. 1873.
20. Romański Adam z Krakowa, ur. r. 1877.
21. Rychłowski Kazimierz z Płocka w Król. Polsk., ur. r. 1876.
22. Schrager Izaak z Krakowa, ur. r. 1876.
23. Staszewski Mieczysław z Oświęcima, ur. r. 1877.
24. Teufel Salomon z Krakowa, ur. r. 1874.
25. Dąbrowski Tadeusz z Pruszyna w Król. Polsk., ur. r. 1873.
26. Tempka Maryan z Krakowa, ur. r. 1877.

zem pozwolono poprawić egzamin po feryach z jednego przedmiotu; jednego eksternistę reprobowano na rok.

Do Rodziców i Opiekunów

Wpisy uczniów na rok szkolny 1895/6 odbędą się d. 29, 30 i 31 sierpnia. Późniejsze zgłoszenie się do zapisu tylko w wyjątkowych wypadkach może być uwzględnione.

Uczniowie mają się zgłaszać do wpisu osobiście w towarzystwie rodziców lub opiekunów i przedłożyć świadectwo z ostatniego półrocza.

Uczniowie nowo do zakładu wstępujący mają przedłożyć: *a)* metrykę urodzenia, *b)* świadectwo szkolne i *c)* złożyć taksę wpisową w kwocie 2 złr. 10 cnt. w. a.

Nadto winien każdy uczeń, wstępujący po raz pierwszy do zakładu, przedłożyć świadectwo rewakcynacyi (powtórnego szczepienia ospy), odbytej w roku poprzedzającym wstąpienie do szkoły. Bez takiego dowodu nie wolno przyjąć ucznia do zakładu.

Każdy uczeń przy wpisie ma złożyć 1 złr. na pomnożenie środków naukowych.

Opłata szkolna, która ma być złożoną w pierwszych sześciu tygodniach każdego półrocza, wynosi 20 złr. w. a. na jedno półrocze.

Rodzice i opiekunowie zechcą przy wpisie oświadczyć dyrekcyi, czy sobie życzą, aby ich synowie lub pupile pobierali naukę w przedmiotach nadobowiązkowych. Kto naukę tę rozpocznie, temu nie wolno jej przerywać przed końcem roku bez zezwolenia dyrekcyi.

Egzamina wstępne do I klasy odbywają się w dwóch terminach, z których pierwszy przypada na 1 lipca, drugi zaś na 2 i 3 września.

Egzamina poprawcze ze wszystkich klas odbędą się w dniach ... rpnia; na egzamina wstępne dla klas wyższych prze... zień 2 i 3 września.

...two wstępne odbędzie się dnia 4 września, a dnia ...ocznie się regularna nauka szkolna.

...dnia 29 czerwca 1895.



Tadeusz Skuba
dyrektor.